Zadania do rozdziału 1.

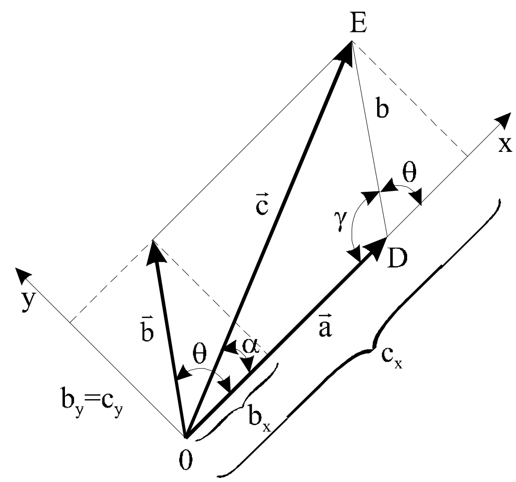
Zad.1.1.

Wykazać, że w wyniku sumowania wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tworzących kąt θ otrzymuje się nowy wektor $\vec{c}$ taki, że jego rzuty na prostokątne osie x i y spełniają zależności:

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y$$

Rozwiązanie:

Wybieramy układ współrzędnych 0xy tak jak na rysunku.



Stosując zasadę równoległoboku znajdujemy wektor $\vec{c}$. Jego rzuty na osie współrzędnych są odpowiednio równe c_x i c_y. Proste rozważania geometryczne wykazują, że

$$c_x = a_x + b_x \quad \text{i} \quad c_y = a_y + b_y$$

Z rysunku też widać, że nachylenie wektora wypadkowego $\vec{c}$ względem osi x (a zatem także względem wektora $\vec{a}$ można wyrazić za pomocą zależności:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c_y}{c_x}$$

Zad.1.2.

W odniesieniu do wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ z zad.1.1 wykazać (opierając się na rozkładzie na składowe), że wartość liczbowa $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$.

Rozwiązanie:

Rzuty danych wektorów na osie wynoszą odpowiednio:

$$a_x = a, \quad b_x = b\cos\theta$$
$$a_y = 0, \quad b_y = b\sin\theta$$

A zatem

$$c_x = a + b\cos\theta, \quad c_y = b\sin\theta.$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa otrzymamy

$$c^2 = c_x^2 + c_y^2 = (a + b\cos\theta)^2 + b^2\sin^2\theta,$$

stąd

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\cos\theta}.$$

Powyższe zadanie możemy rozwiązać posługując się wzorem Carnota dla dowolnego trójkąta ODE.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Ponieważ $\gamma = \pi - \theta$ to $\cos\gamma = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

Zatem $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

Zad.1.3.

Dane są dwa punkty $A(z_A, y_{A,} z_A)$ i $B(z_B, y_B, z_B)$. Znaleźć składowe i cosinusy kierunkowe wektora łączącego te punkty.

Rozwiązanie:

Składowe, czyli rzuty wektora $\vec{a}$ na osie układu 0xyz wynoszą:

$$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$$

$$a_x = x_B - x_A$$

$$a_y = y_B - y_A$$

$$a_z = z_B - z_A$$

Wektor $\vec{a}$ tworzy z osią 0x kąt α, z osią 0y kąt β a z osią 0z kąt γ. Cosinusy kątów α, β i γ zwane cosinusami kierunkowymi wynoszą:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

gdzie a to moduł wektora $\vec{a}$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}.$$

Zatem

$$\cos\alpha = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z_B - z_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

Na podstawie powyższych wzorów łatwo wykazać, że:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Zad.1.4.

Stałe siły $\vec{F}_1$=[1,2,3] [N] i $\vec{F}_2$=[4,-5,-2] [N] działają równomiernie na cząstkę w czasie przesunięcia z punktu A (0,0,7) [m] do punktu B (20,15,0) [m]. Jak wielka praca W została wykonana przy przesunięciu cząstki?

Rozwiązanie:

Wykonana praca W jest określona wzorem

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

gdzie siła $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ jest wypadkową siłą działającego na cząstkę, natomiast $\vec{r}$ jest wektorem przesunięcia

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = [1+4, 2-5, 3-2] = [5, -3, 1]\ [\mathrm{N}]$$

$$\vec{r} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A] = [20-0, 15-0, 0,7]\ [\mathrm{m}]$$

Z definicji (1.9) iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = 5 \cdot 20 - 3 \cdot 15 - 1 \cdot 7 = 100 - 45 - 7 = 48\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = 48[\mathrm{J}]$$

Zad.1.5.

Dane są dwa wektory $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$. Obliczyć:

1. moduły (długości) każdego wektora,
2. sumę i różnicę wektorów,
3. iloczyn skalarny,
4. cosinus kąta α zawartego między wektorami,
5. iloczyn wektorowy.

Rozwiązanie:

Ad.1. $a = |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$

$b = |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{41}$

Ad.2. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{i}(3-1)+\vec{j}(4+2)+\vec{k}(-5+6)=[2,6,1]$

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{i}(3-(-1))+\vec{j}(4-2)+\vec{k}(-5-6)=[4,2,-11]$$

Ad.3. $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot(-1)+4\cdot 2+(-5)\cdot 6=-3+8-30=-25$

Ad.4. $\vec{a}\cdot\vec{b}=-25$

ale z (1.1) wiemy, że

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

zatem $-25=\sqrt{50}\cdot\sqrt{41}\cdot\cos\alpha$

$$\cos\alpha=-\frac{25}{\sqrt{50}\sqrt{41}}$$

Ad.5. Zgodnie z (1.10) możemy zapisać:

$$\vec{a}x\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left[a_y b_z-a_z b_x,\ a_z b_x-a_x b_z,\ a_x b_y-a_y b_x\right]=$$

$$=[4\cdot 6-(-5)2,\ (-5)(-1)-3\cdot 6,\ 3\cdot 2-4\cdot 2]=[34,-13,2]$$

Zad.1.6.

Siła $\vec{F}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}[N]$ działa na punkt, którego położenie wynosi $\vec{r}=-2\vec{i}+5\vec{j}+4\vec{k}[cm]$. Obliczyć moment siły $\vec{M}$ względem początku układu.

Rozwiązanie:

$$\vec{M}=\vec{r}x\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 5 & 4\\ 3 & 2 & -5\end{vmatrix}=(-25-8)\vec{i}+(12-10)\vec{j}+(-4-15)\vec{k}=[-33,2,19]\ [Ncm]$$

$$\vec{M}=[-0.33,0.02,0.19]\ [Nm]$$

Moduł $|\vec{M}|$ wynosi

$$M=|\vec{M}|=\sqrt{0.33^2+0.02^2+0.19^2}[Nm]=0.38[Nm]$$

Zad.1.7.

W płaszczyźnie Oxy porusza się punkt, którego promień wodzący $\vec{r}(t)$ ma postać: $\vec{r}(t)=[R\cos\omega t, R\sin\omega t]$ gdzie R i ω to pewne stałe. Wyznaczyć prędkość $\upsilon(t)$ i przyspieszenie $\vec{a}(t)$ tego punktu.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j}$

gdzie: $x(t) = R\cos\omega t,\ y(t) = R\sin\omega t$

Wektor prędkości $\vec{\upsilon}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$

Wektor przyspieszenia $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$

Zatem

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\cdot\vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dy}\vec{j}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos\omega t) = -R\omega\sin\omega t$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(R\sin\omega t) = R\omega\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}(-R\omega\sin\omega t) = -R\omega^2\cos\omega t$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}(R\omega\cos\omega t) = -R\omega^2\sin\omega t$$

Zatem

$$\vec{\upsilon}(t) = [-R\omega\sin\omega t,\ R\omega\cos\omega t]$$

$$\vec{a}(t) = [-R\omega^2\cos\omega t,\ -R\omega^2\sin\omega t]$$

Moduły tych wektorów wynoszą odpowiednio

$$\upsilon(t) = |\vec{\upsilon}(t)| = \sqrt{R^2\omega^2\sin^2\omega t + R^2\omega^2\cos^2\omega t} = R\omega\sqrt{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t} = R\omega$$

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{R^2\omega^4\cos^2\omega t + R^2\omega^4\sin^2\omega t} = R\omega^2\sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} = R\omega^2$$

Zauważmy, że iloczyn skalarny

$$\vec{\upsilon}(t)\cdot\vec{a}(t) = R^2\omega^3\sin\omega t\cos\omega t - R^2\omega^3\cos\omega t\sin\omega t = 0$$

co oznacza, że wektory $\vec{\upsilon}(t)$ i $\vec{a}(t)$ są wzajemnie prostopadłe.