Zadania do rozdziału 2.

Zad.2.1.

Samochód na autostradzie porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością υ=100 km/godz. W jakim czasie t przebędzie on drogę s=50 km?

Rozwiązanie:

$$s = \upsilon \cdot t$$

$$t = \frac{s}{\upsilon} = \frac{50\,km/godz}{100\,km/godz} = 0.5\,godz.$$

Zad.2.2.

Z miejscowości A oddalonej w linii prostej o 90 km od miejscowości B, wyjeżdża pociąg pospieszny jadąc w kierunku B z prędkością 54 km/godz. Po 10 minutach z miejscowości B wyjeżdża pociąg osobowy jadący w kierunku A z prędkością 36 km/godz. Obliczyć po jakim czasie i w jakiej odległości od miejscowości A nastąpiło spotkanie pociągów?

Rozwiązanie:

Oznaczamy:

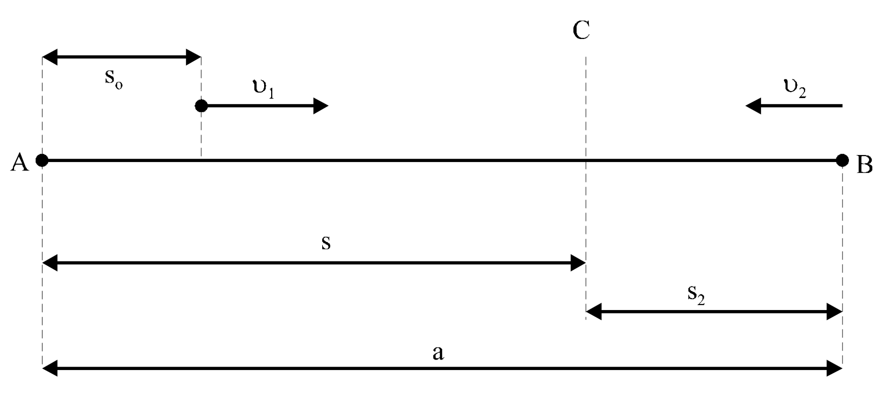
a=AB=90 km = 90000 m

υ_1=54 km/godz = 15 m/s

υ_2=36 km/godz = 10 m/s

t_1=10 min = 600 s

Poszukujemy w jakiej odległości s od A leży punkt C spotkania pociągów oraz po jakim czasie t nastąpiło spotkanie pociągów



Po czasie t_1 gdy pociąg jadący z A do B przejechał drogę

$$s_o = \upsilon_1 \cdot t_1$$

wyrusza pociąg z B do A.

Pociąg z B do A do chwili spotkania przebędzie drogę:

$$s_2 = a - s = \upsilon_2 \cdot (t - t_1)$$

Pociąg z A do B do chwili spotkania przebędzie drogę:

$$s = \upsilon_1 \cdot t$$

Ale

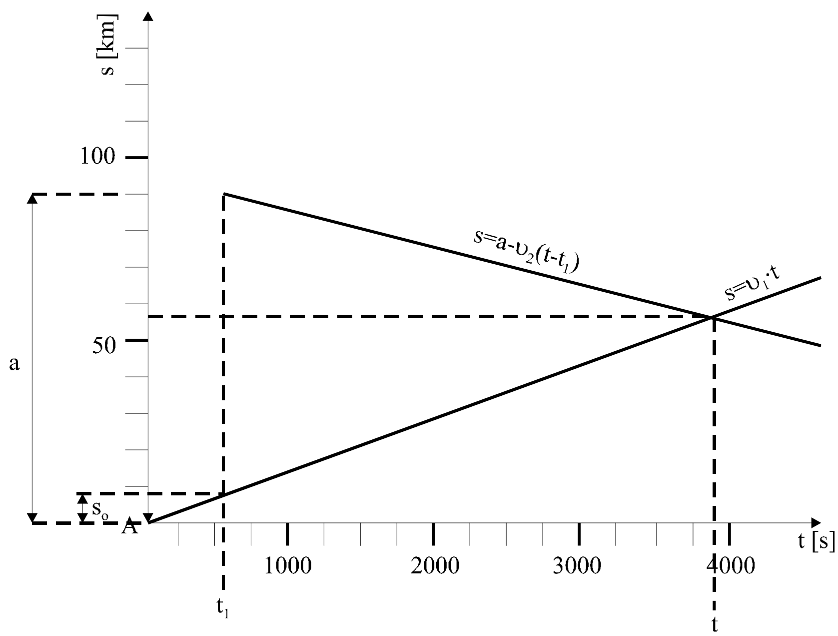
$$a = s + s_2 = \upsilon_2 \cdot (t - t_1) + \upsilon_1 \cdot t$$

$$a = \upsilon_2 \cdot t - \upsilon_2 t_1 + \upsilon_1 \cdot t$$

$$t = \frac{a + \upsilon_2 \cdot t_1}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = \frac{90000\,m + 10\,m/s \cdot 10\,s}{15\,m/s + 10\,m/s} = 3840\,s$$

$$s = \upsilon_1 \cdot t = \upsilon_1 \frac{a + \upsilon_2 \cdot t_1}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = 15\,m/s \cdot 3840\,s = 57600\,m = 57.6\,km$$

Zadanie to można zilustrować



Zad.2.3.

Samochód jadący z prędkością υ_o=54 km/godz w pewnej chwili zaczyna hamować (czyli porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym). Po upływie czasu t_1=5 s od chwili rozpoczęcia hamowania prędkość samochodu wynosi υ=18 km/godz.

Obliczyć opóźnienie samochodu, drogę hamowania i czas po jakim się zatrzyma?

$$\upsilon_o = 54\,km/godz = 15\frac{m}{s}$$

$$\upsilon = 18\,km/godz = 5\frac{m}{s}$$

$$\upsilon = \upsilon_o - at_1$$

$$a = \frac{\upsilon_o - \upsilon}{t_1} = \frac{54\,km/godz - 18\,km/godz}{5\,s} = \frac{15\,m/s - 5\,m/s}{5\,s} = 2\frac{m}{s^2}$$

Opóźnienie a wynosi: $a = 2\frac{m}{s^2}$

t – czas hamowania

Na końcu drogi hamowania $\upsilon=0$

Zatem $\upsilon = \upsilon_o - at$

$$0 = \upsilon_o - at$$

$$t = \frac{\upsilon_o}{a}$$

$$t = \frac{15\,m/s}{2\,m/s^2} = 7.5\,s$$

Czas hamowania t wynosi: t=7.5 s

s – droga hamowania

$$s = \upsilon_o \cdot t - \frac{at^2}{2}$$

$$s = 15\,m/s \cdot 7.5\,s - \frac{2\,m/s^2 \cdot (7.5)^2 s^2}{2} = (112.50 - 56.25)m$$

$$s = 56.25\,m$$

Droga hamowania s wynosi: s=56.25 m.

Zad.2.4.

Z balonu unoszącego się na wysokości h=1960 m zrzucono woreczek z piaskiem. Oblicz czas spadania t woreczka z piaskiem na ziemię oraz prędkość υ w chwili upadku. Przyspieszenie ziemskie $g = 9.81\frac{m}{s^2}$

Rozwiązanie:

Woreczek będzie poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym z zerową prędkością początkową.

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1960\,m}{9.81\,m/s^2}} \cong 20\,s$$

Czas spadania t wynosi: t=20 s.

$$\upsilon = g \cdot t = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg}$$

$$\upsilon = 9.81\,m/s^2 \cdot 20\,s = 196\,m/s$$

Prędkość upadku υ wynosi: υ=196 m/s.

Zad.2.5.

Z karabinka wystrzelono pocisk pionowo w górę z prędkością υ_o=490 m/s. Oblicz wysokość h na jaką wzbije się pocisk oraz czas wznoszenia t i prędkość końcową upadku pocisku?

Rozwiązanie:

$$\upsilon = \upsilon_o + at$$

$$\upsilon = 0 \quad ; \quad a = -g$$

$$0 = \upsilon_o - g \cdot t$$

$$t = \frac{\upsilon_o}{g}$$

$$t = \frac{490\,m}{9.81\,m/s} \cong 50\,s$$

Czas wznoszenia pocisku t wynosi: t=50 s.

$$h = \upsilon_o \cdot t - \frac{gt^2}{2} = \upsilon_o \cdot \frac{\upsilon_o}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{\upsilon_o}{g}\right)^2 = \frac{\upsilon_o{}^2}{2g}$$

$$h = \frac{(490)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 12237\,m$$

Wysokość h, na którą wzbił się pocisk wynosi: h=12237 m.

Oznaczmy przez t_s – czas spadania pocisku z wysokości h

$$h = \frac{g t_s^{\,2}}{2}$$

$$t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \text{ale} \qquad h = \frac{\upsilon_o^{\,2}}{2g}$$

Zatem

$$t_s = \sqrt{\frac{2\upsilon_o^{\,2}}{g \cdot 2g}} = \frac{\upsilon_o}{g}$$

$$t_s = 50\ s$$

Widzimy, że czas spadania pocisku t_s jest taki sam jak czas t jego wznoszenia.

Oznaczmy przez υ_u - prędkość upadku pocisku

$$\upsilon_u = g t_s \qquad \text{ale} \qquad t_s = \frac{\upsilon_o}{g}$$

Zatem

$$\upsilon_u = g \cdot \frac{\upsilon_o}{g} = \upsilon_o$$

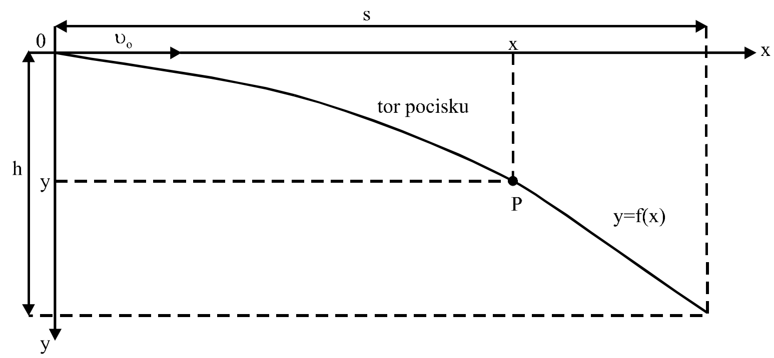
$$\upsilon_u = 490\,m/s$$

Widzimy, że prędkość upadku pocisku υ_u jest taka sama jak prędkość υ_o jego wystrzelenia.

Zad.2.5.

Z wysokości h=1.5 m wystrzelono z karabinu poziomo pocisk z prędkością υ_o=730 m/s. Znaleźć równanie toru pocisku (y=f(x)). Określić odległość s w jakiej pocisk upadnie na ziemię oraz czas t ruchu pocisku. Opór powietrza pominąć.

Rozwiązanie:



Ruch pocisku jest wypadkowym dwóch ruchów:

- w kierunku poziomym (osi 0x) - jednostajnego prostoliniowego z prędkością υ_o
- w kierunku pionowym (osi 0y) - jednostajnie przyspieszonego (z przyspieszeniem ziemskim g) z prędkością początkową równą zero

W chwili t pocisk w punkcie P toru ma współrzędne:

$$\left.\begin{aligned} x &= \upsilon_o \cdot t \\ y &= g\frac{t^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

jest to równanie toru w postaci parametrycznej, gdzie parametrem jest czas t.

Obliczając z pierwszego równania t

$$t = \frac{x}{\upsilon_o}$$

i podstawiając do drugiego

$$y = g \cdot \left(\frac{x}{\upsilon_o}\right)^2 = \frac{g}{\upsilon_o^2} x^2$$

$$y = \frac{g}{\upsilon_o^2} \cdot x^2$$

otrzymujemy równanie toru w postaci jawnej.

Krzywą tą nazywamy parabolą.

Czas lotu pocisku t jest równy czasowi swobodnego spadku tego pocisku z wysokości h.

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.5\,m}{9.81\,m/s^2}} = 0.55\,s$$

Czas lotu pocisku t wynosi: t=55 s.

W tym czasie pocisk przeleci w kierunku osi 0x drogę s

$$s = \upsilon_o \cdot t$$

$$s = \upsilon_o \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\upsilon_o{}^2 h}{g}}$$

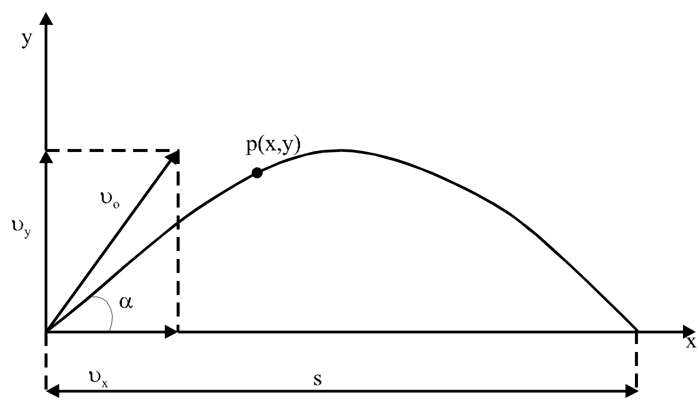
$$s = \sqrt{\frac{2 \cdot (730)^2 \cdot 1.5\,m^2/s^2 \cdot m}{9.81\,m/s^2}} \cong 400\,m$$

Zasięg pocisku s wynosi: s=400 m.

Zad.2.6.

Z moździerza wystrzelono pocisk z prędkością υ_o=200 m/s pod kątem α=60^o do poziomu. Znaleźć równanie toru (y=f(x)). Obliczyć odległość s w jakiej pocisk upadnie na ziemię od miejsca wystrzału oraz czas t lotu pocisku. Opór powietrza pominąć.

Rozwiązanie:



Wektor prędkości $\vec{\upsilon}_o$ rozkładamy na dwie składowe: $\upsilon_x = \upsilon_o \cdot \cos\alpha$ i $\upsilon_y = \upsilon_o \cdot \sin\alpha$.

Teraz ruch pocisku możemy uważać za wypadkową dwóch ruchów;

- w kierunku poziomym (osi 0x) - jednostajnego, prostoliniowego z υ_x
- rzutu w górę (w kierunku osi 0y) z prędkością początkową υ_y.

W chwili t pocisk znajduje się w punkcie P toru o współrzędnych

$$\left.\begin{array}{l} x = \upsilon_x \cdot t = \upsilon_o \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y = \upsilon_y \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} = \upsilon_o \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{array}\right\}$$

Powyższe dwa równania opisują tor i stanowią równanie toru w postaci parametrycznej, gdzie parametrem jest czas t.

Eliminując czas t

$$t = \frac{x}{\upsilon_o \cos\alpha}$$

formujemy równanie toru w postaci jawnej

$$y = \upsilon_o \cdot \sin\alpha \cdot \frac{x}{\upsilon_o \cos\alpha} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{\upsilon_o^2 \cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x - \frac{g}{2\upsilon_o^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

Ponieważ jest to równanie kwadratowe względem x, a więc torem rzutu ukośnego jest parabola.

Zasięg pocisku (x=s) otrzymamy podstawiając do toru pocisku współrzędną y=0 upadku pocisku

$$0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x - \frac{g}{2\upsilon_o^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

$$\frac{2\upsilon_o^2 (\sin\alpha \cos\alpha) x - gx^2}{2\upsilon_o^2 \cos\alpha} = 0$$

$$x\left(2\upsilon_o^2 \sin\alpha \cos\alpha - gx\right) = 0$$

x=0 - to jest punkt startu (nie upadku)

więc rozważmy $2\upsilon_o^2 \sin\alpha \cos\alpha - gx = 0$.

Wiemy, że $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

$$\upsilon_o^2 \sin^2\alpha = gx$$

$$x = \frac{\upsilon_o^2 \sin^2\alpha}{g}$$

$$x = \frac{(200)^2\ m^2/s^2 \cdot \sin 120^o}{9.81\, m/s^2} = \frac{(200)^2 \cdot \cos 30^o}{9.81} m \text{ ; ponieważ } \sin\left(90^o + \alpha\right) = \cos\alpha$$

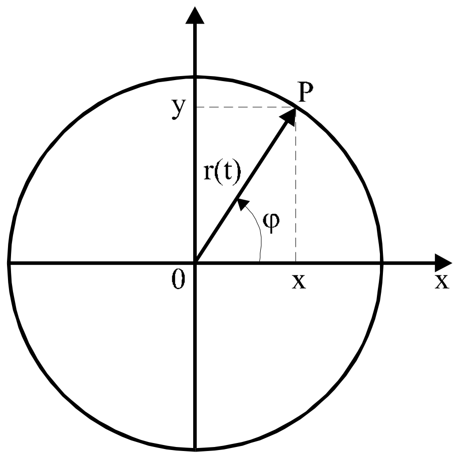
x=3531 m

Zasięg pocisku wynosi s =3531 m.

Zad.2.7.

Punkt P porusza się ruchem jednostajnym po okręgu o promieniu R z prędkością kątową ω. Oblicz prędkość liniową υ ruchu oraz przyspieszenie dośrodkowe a_n. Wykazać, że wektory $\vec{\upsilon}$ i $\vec{a}_n$ są ortogonalne (wzajemnie prostopadłe).

Rozwiązanie:



Ruch P jest jednoznacznie opisany promieniem wodzącym

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Czas t liczymy od chwili gdy φ=0.

Droga kątowa $\varphi = \omega \cdot t$

$$x(t) = R\cos\varphi = R\cos\omega t$$

$$y(t) = R\sin\varphi = R\sin\omega t$$

Prędkość $\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left[\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right]$

$$\frac{dx}{dt} = -R\omega\sin\omega t \qquad \frac{dy}{dt} = R\omega\cos\omega t$$

$$\vec{\upsilon}(t) = [-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t]$$

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}(t)| = \sqrt{R^2\omega^2\sin^2\omega t + R^2\omega^2\cos^2\omega t} = R\cdot\omega$$

Przyspieszenie

$$\vec{a}_n(t) = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \left[\frac{d}{dt}(-R\omega\sin\omega t), \frac{d}{dt}(-R\omega\cos\omega t)\right]$$

$$\vec{a}_n(t) = \left[-R\omega^2\cos\omega t - R\omega^2\sin\omega t\right]$$

$$a_n = |\vec{a}_n(t)| = \sqrt{R^2\omega^4\cos^2\omega t + R^2\omega^2\sin^2\omega t} = R\omega^2 = \frac{\upsilon^2}{R}$$

Aby sprawdzić czy wektory $\vec{\upsilon}$ i $\vec{a}_n$ są ortogonalne obliczamy ich iloczyn skalarny

$$\vec{\upsilon}(t)\cdot\vec{a}_n(t) = [-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t]\cdot\left[-R\omega^2\cos\omega t, -R\omega^2\sin\omega t\right] =$$
$$= R^2\omega^3\sin\omega t\cos\omega t - R^2\omega^3\cos\omega t\sin\omega t = 0$$

Iloczyn skalarny $\vec{\upsilon}\cdot\vec{a}_n = 0$, czyli wektory są ortogonalne.