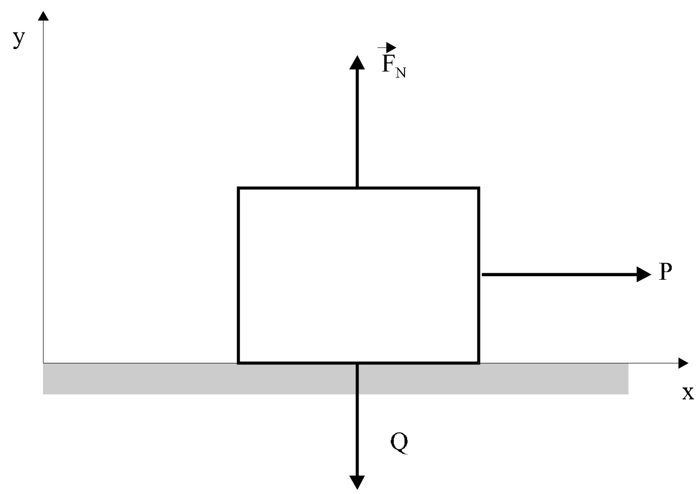
Zadania do rozdziału 3.

Zad.3.1.

Rozważmy klocek o masie m=2 kg ciągnięty wzdłuż gładkiej poziomej płaszczyzny przez siłę $\vec{P}$. Ile wynosi siła reakcji $\vec{F}_N$ wywierana na klocek przez gładką powierzchnię? Oblicz siłę P, która nada klockowi poziomą prędkość $\upsilon_x = 4\,m/s$ w czasie t-2 s (jeżeli w chwili początkowej klocek znajduje się w spoczynku)?

Rozwiązanie:



Na klocek działają siły: $\vec{P}$ - siła ciągnąca, $\vec{Q}$ - siła ciężkości, $\vec{F}_N$ - siła reakcji wywierana na klocek przez powierzchnię.

Z drugiej zasady dynamiki wiemy, że :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

co możemy zapisać

$$\sum F_x = ma_x \;\; i \;\; \sum F_y = ma_y$$

Ponieważ $a_y=0$; $a_x \neq 0$

a $\sum F_y = F_N - Q$; $\sum F_x = P$

Zatem $F_N - Q = 0$; $P = ma_x$

$$Q = m \cdot g; \quad Q = 2\,kg \cdot 9.81\,m/s^2 == 19.62\,N;$$

Ponieważ F_N=Q to siła nacisku F_N=19.62 N

$$a_x = \frac{\upsilon_x - 0}{t} \quad a_x = \frac{4\frac{m}{s}}{2s}; \quad a_x = 2\frac{m}{s^2}$$

Ostatecznie $\quad P = m \cdot a_x; \quad P = 2\,kg \cdot 2\frac{m}{s^2}; \quad P = 4\,N$

Zad.3.2.

Samochód ciężarowy o masie m = 6 t doznaje przyspieszenia $a = 0.5\,m/s^2$. Oblicz siłę F silnika, która ciągnie samochód.

Rozwiązanie:

Z drugiej zasady dynamiki

$$F = m \cdot a$$

$$F = 6000\,kg \cdot 0{,}5\,m/s^2 = 3000\,N$$

Zad.3.3.

Z lotniskowca, którego masa m = 30 000 t, wyrzucony został za pomocą katapulty samolot z siłą F = 90 000 N. Oblicz przyspieszenie a jakie doznaje lotniskowiec?

Rozwiązanie:

Z trzeciej zasady dynamiki wynika, że na lotniskowiec działa siła $\vec{F}$, taka sama co do modułu lecz przeciwnie skierowana, z jaką lotniskowiec wyrzuca samolot.

Z drugiej zasady dynamiki

$$F = m \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{90000\,N}{30\,000\,000\,kg} = 3 \cdot 10^{-3}\,\frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{kg}$$

$$a = 3 \cdot 10^{-3}\,m/s^2$$

Zad.3.4.

Ciało o masie m_1 = 2 kg jest ciągnięte za pomocą nieważkiej nici po gładkiej, poziomej płaszczyźnie. Na drugim końcu nitki przerzuconym przez krążek wisi inne ciało o masie m_2=1 kg. Zakładając, że krążek jest nieważki i służy wyłącznie do zmiany kierunku naprężenia w nici, znaleźć przyspieszenie a układu i naprężenie nici T.

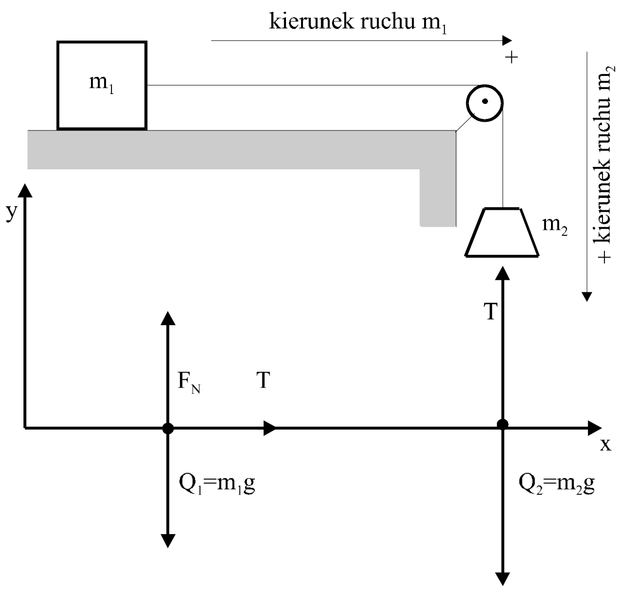
Rozwiązanie:

$$\sum \vec{F} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\sum \vec{F} = m_2 \vec{a}_2$$

$$\vec{a}_1 = \vec{i} a_{1x} + \vec{j} a_{1y}$$

$$\vec{a}_2 = \vec{i} a_{2x} + \vec{j} a_{2y}$$



Ciało o masie m_1 porusza się w kierunku osi x, czyli $a_{1y} = 0$.

Wobec tego możemy napisać dla m_1

$+F_N - m_1 g = 0$ dla osi y

$+T = +m_1 a_{1x}$ dla osi x

i dla m_2

$-T + m_2 g = +m_2 a_{2y}$ dla osi y

$0 = 0$ dla osi x

Ze względu na to, że na krążku zmienia się kierunek naprężenia nici i, że nić ma ustaloną długość, zachodzi

$$a_{1x} = a_{2y} = a$$

Zatem

$$T = m_1 a$$

oraz $m_2 g - T = m_2 a$

co daje $m_2 g - m_1 a = m_2 a$

stąd $$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy:

$$a = \frac{1\,kg}{2\,kg + 1\,kg} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cong 3.3\,m/s^2$$

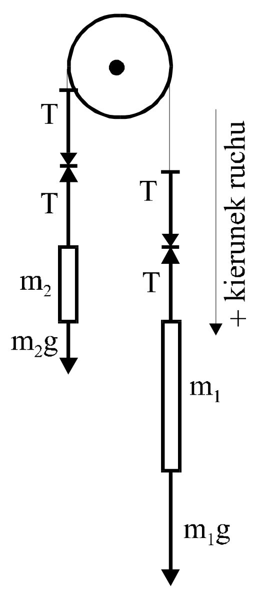
i $$T = m_1 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$T = 2\,kg \frac{1\,kg}{2\,kg + 1\,kg} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cong 6.5\,N$$

Zad.3.5.

Dwie nierówne masy m_1=2 kg i m_2=1 kg są połączone ze sobą za pomocą nieważkiej linki przerzuconej przez niewielki krążek. Oblicz przyspieszenie a układu oraz naprężenie linki T.

Rozwiązanie:



Równanie ruchu masy m_1 ma postać

$$\sum F = m_1 a_1;$$

$$m_1 g - T = m_1 \cdot a_1 \qquad *)$$

Równanie ruchu masy m2 ma postać

$$\sum F = m_2 a_2;$$

$$m_2 g - T = -m_2 \cdot a_2 \qquad **)$$

Ale $a_1 = a_2 = a$ (patrz zad.3.4)

$T = m_1 g - m_1 \cdot a$ i podstawiamy do **)

$$m_2 g - m_1 g + m_1 a = -m_2 a; \quad m_1 a + m_2 a = m_1 g - m_2 g$$

stąd

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy:

$$a = \frac{2\,kg - 1\,kg}{2\,kg + 1\,kg} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cong 3.3 \frac{m}{s^2}$$

oraz

$$T = m_1 g - m_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

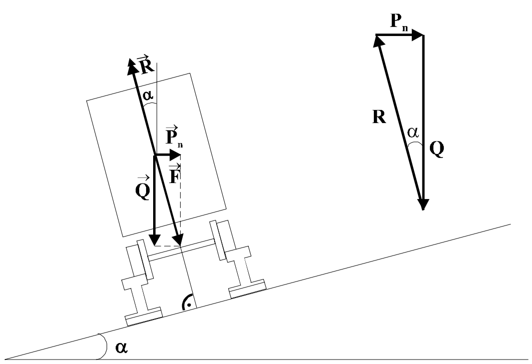
$$T = m_1 g \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) = m_1 g \frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$g = \frac{2 \cdot 2\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\mathrm{kg}}{2\,\mathrm{kg} + 1\,\mathrm{kg}} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cong 13.1\,\mathrm{N}$$

Zad.3.6.

Promień zakrętu toru kolejowego wynosi r=100 m. Pod jakim kątem α ma być nachylony tor do poziomu, aby nacisk pociągu F na tor był prostopadły do toru (koła pociągu nie działają wówczas na płaszczyzny boczne szyn i nie występuje zjawisko zrzucania wagonów z toru) jeżeli prędkość pociągu na zakręcie wynosi υ=36 km/godz.

<u>Rozwiązanie:</u>



Rozpatrujemy jeden wagonu pociągu.

Zakładając, że masa wagonu wynosi m,

$\vec{Q}$ - ciężar wagonu

$\vec{P}_n$ - siła odśrodkowa

$\vec{R}$ - wypadkowa siła reakcji szyn na koła wagonu

$\vec{F}$ - siła nacisku wagonu na tor.

Siła $\vec{F}$ będzie prostopadła do płaszczyzny tory gdy kąt zawarty między siłami $\vec{Q}$ i $\vec{F}$ będzie równy kątowi α nachylenia szyn.

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{P_n}{Q}$$

$$Q = m \cdot g$$

Reakcję odśrodkową (siłę odśrodkową) możemy wyrazić

$$P_n = m \cdot a_n$$

gdzie przyspieszenie odśrodkowe a_n ma postać:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r}$$

Zatem $$P_n = m \cdot \frac{\upsilon^2}{r}$$

Wtedy $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m\frac{\upsilon^2}{r}}{mg} = \frac{\upsilon^2}{r \cdot g}$$

$$\upsilon = 36\frac{km}{godz} = \frac{36.000\,m}{3.600\,s} = 10\,m/s$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{100m^2/s^2}{100\,m \cdot 9.81m/s^2} \approx 0.1$$

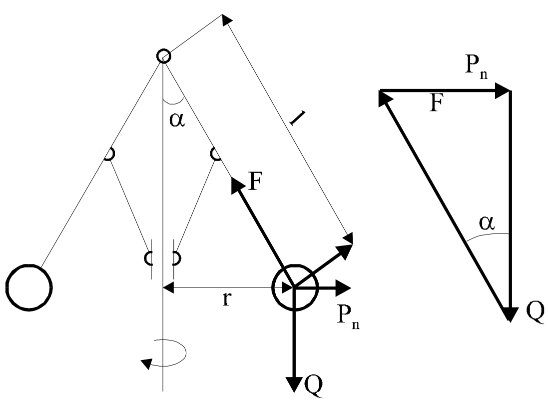
$$\alpha = \operatorname{ar\,ctg} 0.1 \cong 6^o$$

Wniosek: Kąt nachylenia toru na zakręcie nie zależy od masy m jadącego pociągu, a zależy jedynie od jego prędkości υ i promienia krzywizny toru r.

Zad.3.7.

Długość prętów l regulatora Wata wynosi 200 mm. Oblicz kąt α nachylenia ramion regulatora, jego prędkość obrotowa wynosi n=2 obroty/s.

Rozwiązanie:



Zakładamy, że masa kuli regulatora wynosi m. Wtedy na kulę regulatora działają w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku ruchu trzy siły: ciężar kulki Q, siła odśrodkowa P_n oraz naciąg pręta F.

Ponieważ położenie kulki w tej płaszczyźnie przy stałych obrotach nie ulega zmianie, powyższe trzy siły znajdują się w równowadze.

Z trójkąta sił wynikają bezpośrednio następujące zależności

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_n}{Q}$$

Ciężar ciała Q można wyrazić równaniem $Q = m \cdot g$,

a reakcję odśrodkową P_n równaniem $$P_n = \frac{m\upsilon^2}{r}$$

gdzie: $r = l\sin\alpha$, a prędkość kulki $\upsilon = 2\pi nr = 2\pi nl \sin\alpha$, skąd

$$P_n = \frac{m \cdot 4\pi^2 n^2 l^2 \sin^2 \alpha}{l \sin \alpha} = 4\pi^2 n^2 m l \sin \alpha$$

Podstawiając wartość Q i P_n do pierwszego równania otrzymamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4\pi^2 \cdot n^2 \cdot m \cdot l \cdot \sin \alpha}{m \cdot g}$$

i uwzględniając, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ otrzymamy

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4\pi^2 n^2 l \sin \alpha}{g}$$

Zatem

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{4\pi^2 n^2 l}{g}$$

$$\cos \alpha = \frac{g}{4\pi^2 n^2 l}$$

$$\cos \alpha = \frac{9.81\,m/s^2}{4 \cdot (3.14)^2 \cdot 2^2 \frac{1}{s^2} \cdot 0.2\,m} = 0.31$$

$$\alpha = \arccos 0.31 \cong 71^o$$

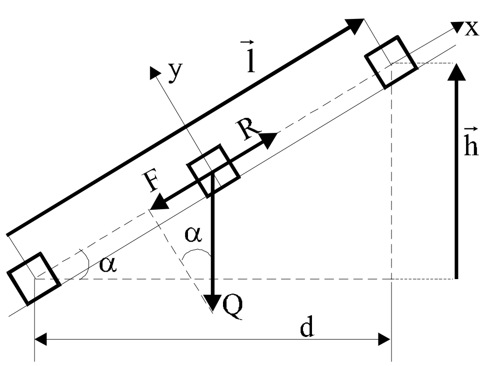
Wniosek: Kąt nachylenia α ramion regulatora Wata nie zależy od masy m kuli regulatora.

Zad.3.8.

Jaką pracę W wykona człowiek przesuwający klocek o masie m=10 kg z podstawy na szczyt równi pochyłej mającej długość d=5 m i wysokość h=3 m. Człowiek przesuwa klocek ze stałą prędkością siłą P równoległą do równi. Oblicz moc człowieka P przy wykonywaniu tej pracy, jeśli czas przesuwania klocka wynosił t=10 s.

Rozwiązanie:

Sytuacja jest przedstawiona na rysunku.



Ponieważ przesuwanie klocka wzdłuż osi x odbywa się (bez przyspieszenia) ruchem jednostajnym, zatem II zasada dynamiki przyjmie postać

$$\sum F = R - F = 0$$

$$F = Q \cdot \sin\alpha$$

$$Q = m \cdot g; \quad \sin\alpha = \frac{h}{l}$$

$$R = mg\frac{h}{l}; \quad R = 10\,kg \cdot 9.81\,m/s^2 \cdot \frac{3\,m}{5\,m} = 58.8\,N$$

$$R \cong 58.8\,N$$

Praca W wykonana przez siłę P na drodze l

$$W = \vec{R} \cdot \vec{l} = P \cdot l$$

$$W = 58.8\,N \cdot 5\,m = 294\,J$$

Gdyby klocek trzeba było podnieść do góry bez użycia równi to wówczas wykonalibyśmy pracę W'

$$W' = \vec{Q} \cdot \vec{h} = Q \cdot h$$

$$W' = 10\,kg \cdot 9.81\,m/s^2 \cdot 3\,m = 294\,J$$

A więc praca W=W'. Używając równi pochyłej możemy zyskać na sile, ale musimy wykonać taką samą pracę.

Moc człowieka

$$P = \frac{W}{t}$$

$$P = \frac{294\,J}{10\,s} = 29.4\,W$$

Zad.3.10.

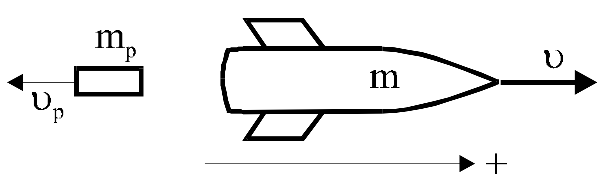
Oblicz prędkość υ, którą uzyska rakieta o masie m=1.6 t w chwili startu, jeżeli gazy spalinowe posiadały prędkość $\upsilon_p = 3500\,m/s$, a masa spalonego paliwa wraz z utleniaczem wynosiła m_p=50 kg.

Rozwiązanie:

Przed startem rakieta miała masę $m_o = m + m_p$, zaś prędkość $\upsilon_o = 0$.

Zatem pęd $\vec{p} = m_o \vec{\upsilon}_o = 0$.

Ponieważ na rakietę w chwili startu nie działają żadne siły zewnętrzne, dlatego pęd p całego układu (rakieta + wylatujące spaliny) musi być równy zero.



Pęd rakiety po starcie $p_r = m\upsilon$

Pęd spalin po starcie $p_s = -m_p \upsilon_p$

Pęd układu $p_r = m\upsilon - m_p \upsilon_p = 0$

Zatem $m\upsilon = m_p \upsilon_p$

$$\upsilon = \frac{m_p \upsilon_p}{m}$$

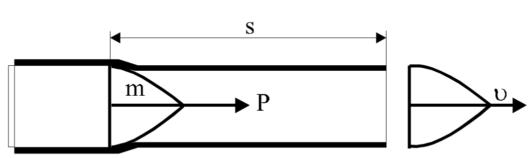
$$\upsilon = \frac{50\,kg \cdot 3500\,m/s}{1600\,kg} \cong 110\,m/s$$

$$\upsilon = 110\,m/s$$

Zad.3.10.

Oblicz energię kinetyczną pocisku o masie m=40 kg, wystrzelonego z lufy armatniej z prędkością $\upsilon = 600\,m/s$. Oblicz średnią siłę parcia P gazów prochowych w lufie, jeżeli długość jej wynosi s=2 m.

Rozwiązanie:



Energia kinetyczna E_K pocisku wynosi

$$E_K = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

$$E_K = \frac{40\,kg \cdot (600)^2\,m^2/s^2}{2} = 7200000\,J$$

Energia kinetyczna jaką uzyskał pocisk po opuszczeniu lufy pojawiła się kosztem wykonanej pracy W, którą wykonały gazy prochowe przesuwające pocisk siłą P na dystansie długości lufy s

$$W = P \cdot s = E_K$$

$$P = \frac{E_K}{s} = \frac{= m\upsilon^2}{2s}$$

$$P = \frac{40\,kg \cdot (600)^2\,m^2/s^2}{2 \cdot 2m} = 3600000\,N$$