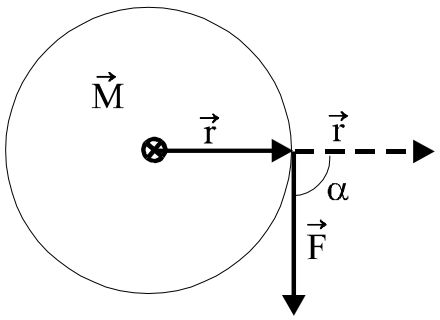
Zadania do rozdziału 4.

Zad.4.1.

Obliczyć moment siły $\vec{M}$ dla siły $\vec{F} = 120\,N$ względem osi obrotu krążka o promieniu r=20 cm, jeżeli działa ona stycznie do krążka.

Rozwiązanie:



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = |\vec{M}| = r \cdot F \cdot \sin\alpha$$

$$\alpha = 90^o$$

$$\sin\alpha = 1$$

$$M = r \cdot F = 120\,N \cdot 0{,}2\,m$$

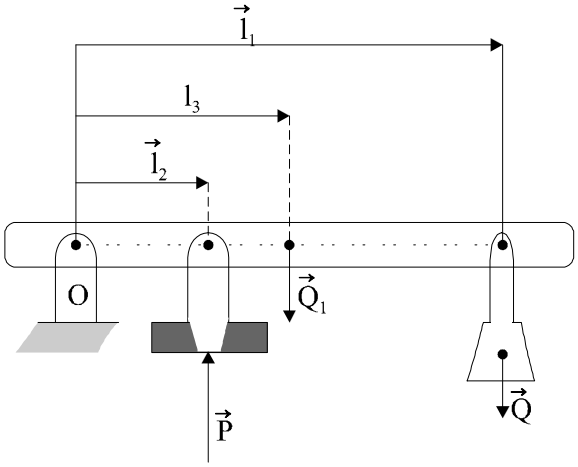
M=24 Nm

Wektor momentu siły $\vec{M}$ leży na linii osi obrotu krążka (jest prostopadły do płaszczyzny krążka) i skierowany jest za płaszczyznę rysunku.

Zad.4.2.

Obliczyć, jaki ciężarek Q należy zawiesić na końcu dźwigni zaworu bezpieczeństa, który się podniesie z chwilą, gdy parcie pary P na grzybek zaworu wyniesie 180 N. Dźwignię stanowi jednorodny żelazny płaskownik o masie m_1=3 kg i długości l_1=0.8 m. Odległość osi zaworu od osi dźwigni wynosi l_2=15 cm.

Rozwiązanie:



Siła ciężkości dźwigni

$$Q_1 = m_1 g$$

umiejscowiona jest w środku ciężkości dźwigni czyli w odległości $l_3 = \frac{1}{2} l_1 = 0.4\,m$ od osi obrotu O zaworu.

Na dźwignię działają następujące momenty siły

$\vec{M}_1 = \vec{l}_1 \text{ x } \vec{Q}$ od siły $\vec{Q}$ ciężkości ciężarka,

$\vec{M}_2 = \vec{l}_2 \text{ x } \vec{P}$ od siły $\vec{P}$ parcia pary na zawór,

$\vec{M}_3 = \vec{l}_3 \text{ x } Q_1$ od siły $\vec{Q}_1$ ciężkości dźwigni

$\vec{M}_1, \vec{M}_2$ i $\vec{M}_3$ działają wzdłuż osi obrotu dźwigni, przy czym $\vec{M}_1$, i $\vec{M}_3$ są skierowane do nas (od płaszczyzny rysunku), a $\vec{M}_2$ za płaszczyznę rysunku.

Równowaga nastąpi gdy

$$\sum \vec{M} = 0$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 0$$

$$M_1 = l_1 \cdot Q$$

$$M_2 = -l_2 \cdot P$$

$$M_3 = l_3 \cdot Q_1$$

$$l_1 \cdot Q - l_2 \cdot P + l_3 \cdot Q_1 = 0$$

$$Q = \frac{l_2 \cdot P - l_3 \cdot Q_1}{l_1} = \frac{l_2 \cdot P - l_3 \cdot Q_1 \cdot m_1 \cdot g}{l_1}$$

$$Q = \frac{0.15\,\text{m} \cdot 180\,\text{N} - 0.4\,\text{m} \cdot 3\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2}{0.8\,\text{m}}$$

$$Q = \frac{27-12}{0.8}\,\text{N} \qquad Q = 18.75\,\text{N}$$

Ale Q=mg; gdzie m to masa ciężarka

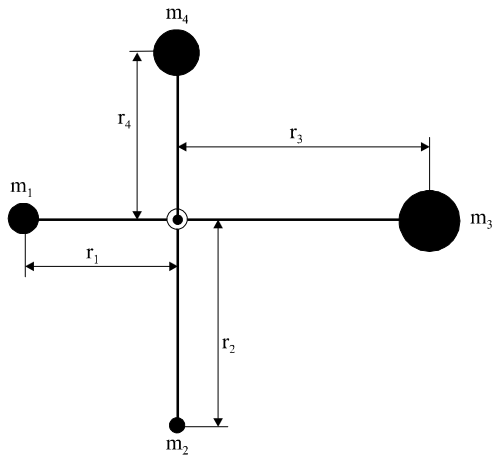
$$m = \frac{Q}{g} = \frac{18.75\,\text{N}}{9.81\,\text{m/s}^2} \approx 1.9\,\text{kg}$$

$$m \cong 1.9\,\text{kg}$$

Na końcu dźwigni należy zawiesić ciężarek Q o masie m=1.9 kg.

Zad.4.3.

Oblicz moment bezwładności I „krzyżaka” przedstawionego na rysunku.



$m_1 = 2\,kg \qquad r_1 = 3\,m$

$m_2 = 1\,kg \qquad r_2 = 4\,m$

$m_3 = 4\,kg \qquad r_3 = 5\,m$

$m_4 = 3\,kg \qquad r_4 = 3\,m$

Rozwiązanie:

$$I = \sum_{i=1}^{4} m_i r_i^2$$

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2$$

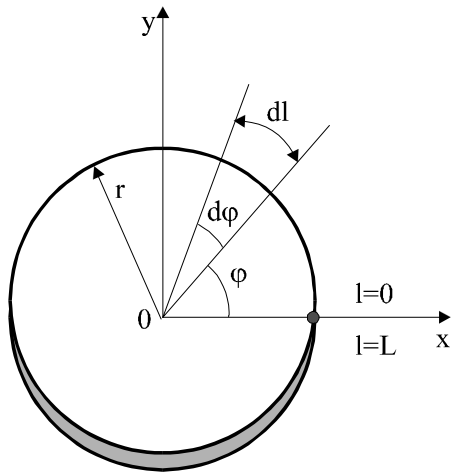
$$I = 2 \cdot 9\,kg\,m^2 + 1 \cdot 16\,kg\,m^2 + 4 \cdot 25\,kg\,m^2 + 3 \cdot 9\,kg\,m^2$$

$$I = 161\,kg\,m^2$$

Zad.4.4.

Oblicz moment bezwładności I „cienkiej obręczy” (o masie m = 5 kg i promieniu r = 1 m) względem osi przechodzącej przez jej środek.

Rozwiązanie:



Obręcz ma symetrię „cylindryczną”, więc wygodnie będzie rozwiązać ten problem nie w kartezjańskim układzie współrzędnych (0xy), lecz w układzie biegunowym (0,r,φ).

Obliczamy „gęstość liniową” obręczy $\eta\left[\frac{kg}{m}\right]$

$$\eta = \frac{m}{L}$$

gdzie: $L = 2\pi r$ to obwód obręczy.

$$\eta = \frac{m}{2\pi r}$$

Element długości dl obręczy ma masę dm

$$dm = \eta \cdot dl$$

i jest oddalony od osi O obrotu o r.

Element ten ma moment bezwładności dI

$$dI = dm \cdot r^2 = \eta r^2 dl = \frac{m}{2\pi r} \cdot r^2 dl = \frac{mr}{2\pi} dl$$

Moment bezwładności I całej obręczy wynosi:

$$I = \int_o^L dI = \int_o^L \frac{mr}{2\pi} dl = \frac{mr}{2\pi} \int_o^L dl = \frac{mr}{2\pi} \cdot L$$

Podstawiając za L=2πr otrzymujemy

$$I = \frac{mr}{2\pi} \cdot 2\pi r$$

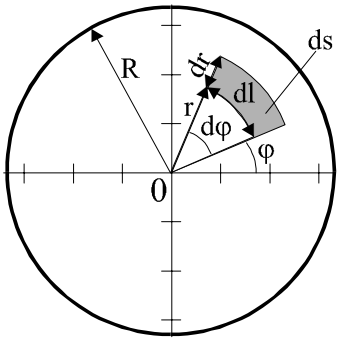
$$I = m \cdot r^2$$

$$I = 5\,kg \cdot 1\,m^2 = 5\,kg\,m^2 .$$

Zad.4.5.

Oblicz moment bezwładności I „cienkiego krążka: (o masie m=5 kg i promieniu R=1m) względem osi przechodzącej przez jego środek.

<u>Rozwiązanie:</u>



Zadanie rozwiązujemy w biegunowym układzie współrzędnych (0,r,φ).

W układzie tym element powierzchni ds.

$$ds = dl \cdot dr$$

Ale z definicji kąta łukowego wiemy, że

$$d\varphi = \frac{dl}{r}; \quad dl = r \cdot d\varphi$$

Zatem $ds = rd\varphi dr$

Obliczamy „gęstość powierzchniową” σ krążka

$$\sigma = \frac{m}{s} \qquad \text{gdzie } S = \pi r^2 \text{ jest powierzchnią całkowitą krążka.}$$

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$$

Element powierzchni krążka ds. ma masę dm

$$dm = \sigma \cdot ds$$

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} \cdot r d\varphi dr$$

i jest oddalony od osi O obrotu o r.

Element ten ma moment bezwładności dI

$$dI = dm \cdot r^2 = \frac{m \cdot r}{\pi R^2} \cdot d\varphi dr \cdot r^2$$

$$dI = \frac{mr^3}{\pi R^2} d\varphi dr$$

Moment bezwładności I całego krążka wynosi:

$$I = \int\limits_{\substack{\text{po calym} \\ \text{krążku}}} dI = \int_o^{2\pi} \left[\int_o^R \frac{m}{\pi R^2} r^3 dr \right] d\varphi$$

$$I = \frac{m}{\pi R^2} \int_o^{2\pi} \left[\int_o^R r^3 dr \right] d\varphi$$

$$I = \frac{m}{\pi R^2} \int_o^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\varphi = \frac{m}{\pi} \frac{R^2}{4} \int_o^{2\pi} d\varphi$$

$$I = \frac{mR^2}{4\pi} \cdot 2\pi = \frac{mR^2}{2}$$

$$I = \frac{5\,kg \cdot 1\,m^2}{2} = 2.5\,kg\,m^2$$

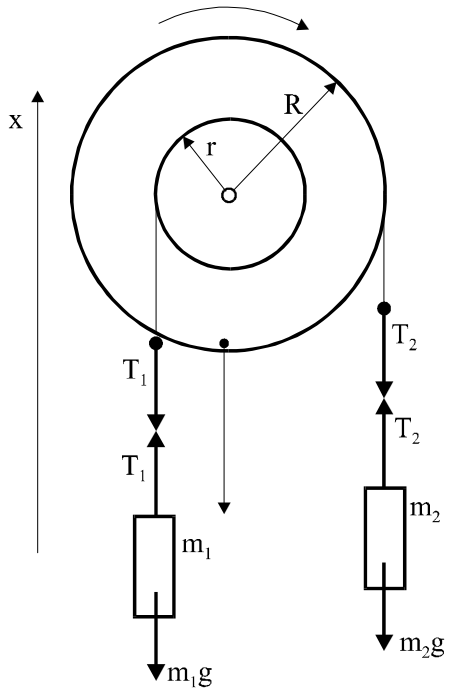
Zad.4.6.

Na kołowrót nawinięte są w kierunkach przeciwnych dwie lekkie nici obciążone ciałami o masach m_1 i m_2 $(m_2 > m_1)$.

Znaleźć przyspieszenie kątowe kołowrotu ε i naprężenie T_1 i T_2 w niciach uwzględniając moment bezwładności I kołowrotu.

<u>Rozwiązanie:</u>

Przyjmując zwrot układu współrzędnych tak jak na rysunku, równania ruchu dla mas m_1, m_2 i bloczka są postaci



$$m_1 a_1 = -m_1 g + T_1 \qquad (a)$$

$$-m_2 a_2 = -m_2 g + T_2 \qquad (b)$$

$$I\varepsilon = T_2 R - T_1 r \qquad (c)$$

gdzie przyspieszenia liniowe a_1 i a_2 są związane z przyspieszeniem kątowym bloczka według relacji

$$a_1 = \varepsilon r \qquad (d)$$

$$a_2 = \varepsilon R \qquad (e)$$

Rozwiązując układ równań (a ÷ e) otrzymujemy

$$\begin{cases} m_1 \varepsilon r = -m_1 g + T_1 & /\bullet\, r & (f) \\ -m_2 \varepsilon R = -m_2 g + T_2 & /\bullet\, R & (g) \\ I\varepsilon = T_2 R - T_1 r & & \end{cases}$$

$$I\varepsilon = m_2 g R - m_2 \varepsilon R^2 - m_1 g r - m_1 \varepsilon r^2$$

$$\varepsilon = \frac{m_2 R - m_1 r}{I + m_2 R^2 + m_1 r^2} g$$

Naprężenie nici T_1 i T_2 obliczamy z równań (f) i (g) wstawiając obliczoną wartość ε

$$T_1 = m_1 g + m_1 r \varepsilon$$

$$T_2 = m_2 g - m_2 R \varepsilon$$

Zad.4.7.

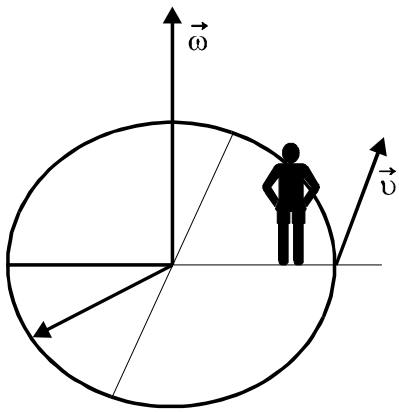
Na brzegu dużej poziomej swobodnie obracającej się tarczy o promieniu r i momencie bezwładności I_o stoi człowiek o masie m. Tarcza wykonuje n obrotów na minutę. Jakiej zmianie ulegnie prędkość kątowa tarczy ω, gdy człowiek ten, o masie m, przejdzie od jej brzegu do środka?, Jak zmieni się przy tym energia układu? Rozmiary człowieka w porównaniu z promieniem tarczy można pominąć.

<u>Rozwiązanie:</u>

Na układ nie działają żadne zewnętrzne momenty siły, dlatego

Moment pędu $\vec{L} = \text{const}$

$\vec{L} = I\vec{\omega}$, gdzie I to moment bezwładności układu, a ω to prędkość kątowa.



Gdy człowiek stoi na brzegu tarczy to $I = I_o + mr^2$ i wtedy

$$L_1 = \left(I_o + mr^2\right)\omega_1$$

Gdy człowiek stoi w środku tarczy to $I = I_o$ bo r = 0 i wtedy

$$L_2 = I_o\omega_2$$

Z zasady zachowania momentu pędu L wynika:

$$L_1 = L_2; \quad \left(I_o + mr^2\right)\omega_1 = I_o\omega_2; \quad \omega_2 = \frac{I_o + mr^2}{I_o} 2\pi n \quad \text{bo} \quad \omega_1 = 2\pi n$$

$$\omega_2 = 2\pi n_2 \qquad n_2 = \omega_2 / 2\pi = \frac{I_o + mr^2}{I_o} \eta \left[\frac{\text{obr.}}{\text{min.}}\right]$$

Energię kinetyczną układu opisuje wzór

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Gdy człowiek stoi na brzegu tarczy układ ma energię E_{k_1}

$$E_{k_1} = \frac{1}{2}\left(I_o + mr^2\right)\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(I_o + mr^2\right) \cdot 4\pi^2 n^2$$

Gdy człowiek stoi w środku tarczy układ ma energię E_{k_2}

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} I_o\, \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_o \left[\frac{I_o + mr^2}{I_o}\right] \cdot 4\pi^2 n^2$$

Przyrost energii ΔE związany z przejściem człowieka z brzegu do środka tarczy

$$\Delta E = E_{k_2} - E_{k_1} = 2\pi^2 n^2 \left[\frac{\left(I_o + mr^2\right)^2}{I_o} - \left(I_o + mr^2\right)\right]$$

$$\Delta E = 2\pi^2 n^2 \left(I_o + mr^2\right)\left[\frac{\left(I_o + mr^2 - I_o\right)}{I_o}\right]$$

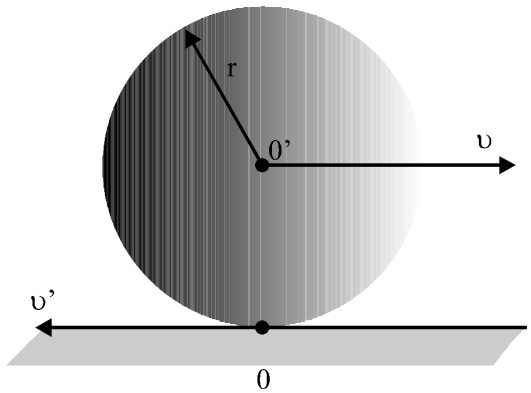
$$\Delta E = 2\pi^2 n^2 \left(I_o + mr^2\right) \cdot mr^2 \cdot \frac{1}{I_o}$$

Zad.4.8.

Obliczyć energię kinetyczną E_k kuli o masie m i promieniu r, toczącej się bez poślizgu z prędkością υ.

Rozwiązanie:

Zadanie jest nieco skomplikowane ze względu na to, że tocząca się kula odbywa dwa ruchy: ruch postępowy z prędkością υ i ruch obrotowy względem osi O' przechodzącej przez środek kuli i nie zmieniającej swego położenia w kuli.



Energie kinetyczne związane z wymienionymi ruchami wynoszą odpowiednio:

$$E_k' = \frac{m\upsilon^2}{2} \quad \text{dla ruchu postępowego}$$

$$E_k'' = \frac{I\omega^2}{2} \quad \text{dla ruchu obrotowego}$$

gdzie $I = \frac{2}{5}mr^2$ to moment bezwładności kuli (patrz Tabela 4.1).

Zatem

$$E_k = E_k' + E_k''$$

Prędkość kątową ω kuli chcemy powiązać z prędkością υ ruchu postępowego. W tym celu bierzemy pod uwagę punkt O styczności kuli z płaszczyzną, po której się ona toczy. Prędkość chwilowa tego punktu równa się zeru, ale równocześnie może być ona przedstawiona jako suma geometryczna prędkości υ ruchu postępowego (skierowanej np. w prawo) i prędkości υ' tego punktu w jego ruchu obrotowym (skierowanej w lewo). A zatem

$$0 = \upsilon - \upsilon'$$

Ale $\upsilon' = \omega r$, a więc

$$\upsilon - \omega r = 0, \qquad \text{czyli} \qquad \omega = \frac{\upsilon}{r}.$$

Szukaną energię kinetyczną kuli toczącej się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej można więc przedstawić w postaci

$$E_k = E_k' + E_k'' = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{2m\upsilon^2}{5 \cdot 2},$$

$$E_k = \frac{7}{5}\frac{m\upsilon^2}{2}.$$