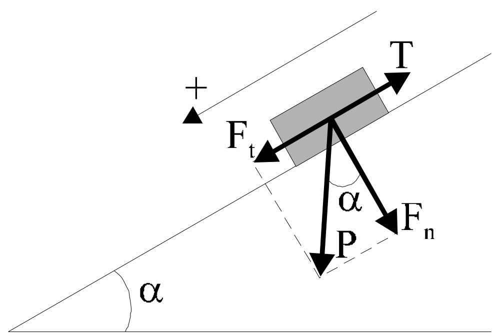
Zadania do rozdziału 5

Zad.5.1.

Udowodnij, że stosując równię pochyłą o dającym się zmieniać kącie nachylenia α można wyznaczyć współczynnik tarcia statycznego μ_o.

Rozwiązanie:



W czasie zsuwania się po równi ciało o ciężarze P=mg podlega działaniu wypadkowej dwóch sił:

siły zsuwającej

$$F_t = P \sin \alpha$$

i hamującej siły tarcia $T = \mu_o F_n$,

$F_n = P \cos \alpha$

$$T = \mu_o P \cos \alpha$$

Siła wypadkowa F wywołująca ruch równa się

$$F = F_t - T$$

$$F = P \sin \alpha - \mu_o P \cos \alpha ,$$

ale P=mg

zatem $$F = mg(\sin \alpha - \mu_o \cos \alpha)$$

Jeżeli przy danym kącie nachylenia równi ciało samorzutnie nie zaczyna się zsuwać, to znaczy że siła tarcia T jest większa od siły zsuwającej F_t. Stopniowo zwiększając nachylenie można osiągnąć taki kąt α, przy którym ruch się rozpocznie. To świadczy o bardzo małej przewadze siły F_t nad siłą T. W przybliżeniu można zakładać, że przy kącie granicznym, zwanym kątem tarcia, zachodzi równość wspomnianych sił:

$$F_t = T$$

Ostatnie równanie można też zapisać w postaci

$$P \sin \alpha_t = \mu_0 P \cos \alpha_t$$

gdzie μ_0 oznacza współczynnik tarcia statycznego. Z dalszego przekształcenia wynika, że

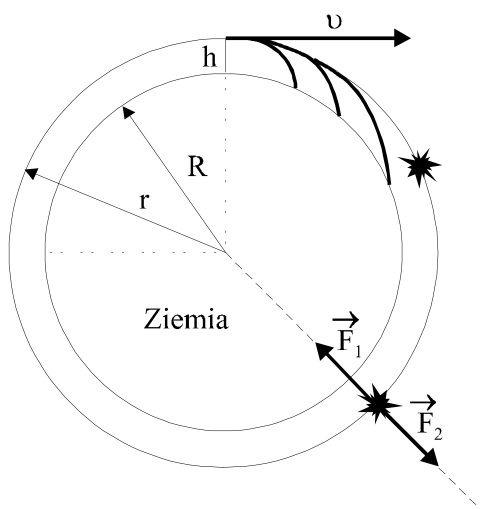
$$\mu_0 = \mathrm{tg}\, \alpha_t$$

Współczynnik tarcia statycznego równa się zatem tangesowi najmniejszego kąta α, przy którym ciała zaczyna zsuwać się po równi pochyłej.

Zad.5.2.

Wyznaczyć pierwszą prędkość kosmiczną, czyli najmniejszą możliwą prędkość υ_I, jaką musi mieć punkt materialny (satelita) swobodnie krążący po orbicie wokół Ziemi. Promień Ziemi R=6400 km.

<u>Rozwiązanie:</u>



Wyobraźmy sobie pocisk wystrzelony poziomo na wys. h nad Ziemią, któremu nadano pewną prędkość początkową υ. Po przebyciu pewnej drogi pocisk spadnie na Ziemię. Jeżeli będziemy zwiększać prędkość początkową pocisku, to jego droga będzie coraz dłuższa i przy pewnej prędkości początkowej pocisk zacznie obiegać Ziemię dookoła i nie spadnie na jej powierzchnię. Nastąpi to wtedy, gdy prędkość początkowa pocisku osiągnie pierwszą prędkość kosmiczną.

Na poruszający się po orbicie pocisk o masie m działają dwie siły F_1 i F_2 o przeciwnych zwrotach:

siła odśrodkowa $\quad F_2 = \dfrac{m\upsilon^2}{r} \quad$ i

siła grawitacji $\quad F_1 = k_g \dfrac{Mm}{r^2}$

Warunkiem, aby orbita, po której porusza się pocisk, była stabilna jest równowaga tych sił

$$F_1 = F_2$$

$$k_g \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{\upsilon^2}{r}$$

i stąd

$$\upsilon = \sqrt{\frac{k_g M}{r}}$$

Promień r orbity satelity wynosi:

$$r = R + h$$

Ponieważ h<<R to pierwsza prędkość kosmiczna υ_I wyraża się wzorem

$$\upsilon_I = \sqrt{\frac{k_g M}{R}}$$

Ale wiemy, że na powierzchni Ziemi spełnione jest równanie:

$$mg = k_g \frac{m \cdot M}{R^2}$$

$$k_g \cdot M = g \cdot R^2$$

Ostatecznie

$$\upsilon_I = \sqrt{\frac{k_g M}{R}} = \sqrt{gR}$$

$$\upsilon_I = \sqrt{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 6400000\,m}$$

$$\upsilon_I = 7924\,m/s \cong 7.9\,km/s\,.$$

Zad.5.3.

Wyznaczyć drugą prędkość kosmiczną tzw. prędkość ucieczki, czyli najmniejszą możliwą prędkość υ_{II} jaką musi mieć punkt materialny (satelita) przy powierzchni Ziemi, aby mógł się oddalić od Ziemi w nieskończoność. Promień Ziemi R=6400 km.

Rozwiązanie:

Obliczmy najpierw, z jaką prędkością υ trzeba rzucić ciało pionowo do góry, aby wzniosło się ono na wysokość h. Zastosujemy w tym celu zasadę zachowania energii.

Całkowita energia mechaniczna E_1 na powierzchni Ziemi wynosi:

$$E_1 = E_k + E_p(R)$$

gdzie $E_k = \frac{m\upsilon^2}{2}$ to energia kinetyczna

$E_p = -k_g \frac{Mm}{R}$ to grawitacyjna energia potencjalna (patrz 5.19)

$$E_1 = \frac{m\upsilon^2}{2} - k_g \frac{M \cdot m}{R}$$

Całkowita energia mechaniczna E_2 ciała na wysokości h ma postać:

$E_2 = -k_g \frac{Mm}{R+h}$ bo na wysokości h; E_k=0

Z prawa zachowania energii

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - k_g \frac{M \cdot m}{R} = -k_g \frac{Mm}{R+h}$$

$$\upsilon = \sqrt{2k_g M\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+h}\right)}$$

Podstawiając $h = \infty$, otrzymujemy prędkość ucieczki

$$\upsilon_{II} = \sqrt{\frac{2k_g M}{R}}$$

Ale wiedząc, że na powierzchni Ziemi spełniona jest równość

$$mg = k_g \frac{M \cdot m}{R^2}$$

$$k_g M = g \cdot R^2$$

Ostatecznie

$$\upsilon_{II} = \sqrt{\frac{2k_g M}{R}} = \sqrt{2gR}$$

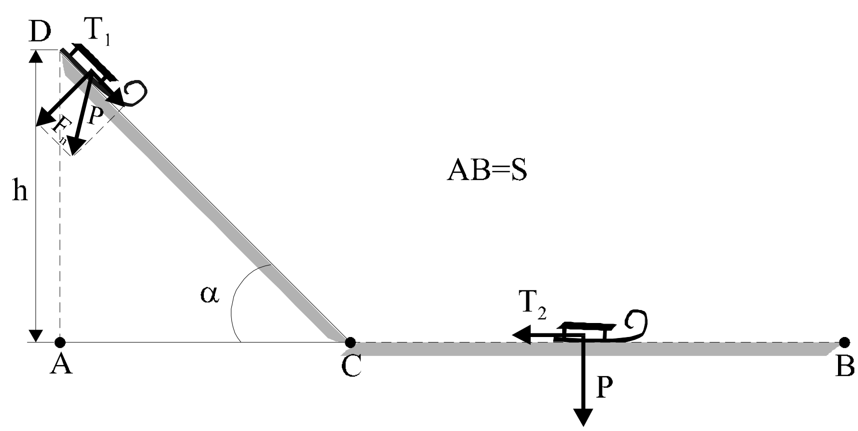
$$\upsilon_{II} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 6400000\, m}$$

$$\upsilon_{II} = 11206\, m/s \cong 11.2\, km/s$$

Zad.5.4.

Sanki ześlizgują się z oblodzonej góry o wysokości h i zatrzymują się przebywając odległość CB. Odległość AB=S. Określić współczynnika tarcia μ sanek o lodową powierzchnię. Obliczyć przyspieszenie a sanek na odcisku CB.

Rozwiązanie:



$$\mu = \frac{T_1}{F_n}; \quad \mu = \frac{T_2}{P}; \quad F_n = P \cdot \cos\alpha; \quad P = mg$$

W punkcie D sanki mają energię potencjalną

$$E_p = mgh$$

W punkcie C sanki mają energię kinetyczną

$$E_k^c = \frac{m\upsilon^2}{2} = E_p - W_{DC}$$

gdzie W_{DC} – to praca wykonana przeciw sile tarcia T_1 na odcinku DC.

W punkcie B sanki mają $\upsilon = 0$, $E_k^B = 0$

$$E_k^B = E_p - W_{DC} - W_{CB} = 0$$

gdzie W_{CB} – to praca wykonana przeciw sile tarcia T_2 na odcinku CB.

Z prawa zachowania energii

$$E_p = W_{DC} + W_{CB}$$

$$W_{DC} = T_1 \cdot DC$$

$$W_{CB} = T_2 \cdot CB$$

$$mgh = T_1 \cdot DC + T_2 \cdot CB$$

$$T_1 = mg \cdot \cos\alpha \cdot \mu$$

$$T_2 = mg \cdot \mu$$

$$CB = S - AC$$

$$mgh = mg \cdot \cos\alpha \cdot \mu \cdot DC + mg\mu \cdot (S - AC) \qquad \text{ale} \qquad AC = DC \cdot \cos\alpha$$

$$mgh = mg \cdot \mu \cdot S$$

Zatem

$$\mu = \frac{h}{S}$$

Opóźnienie a na odcinku CB obliczamy z drugiej zasady dynamiki Newtona

$$m \cdot a = T_2 \qquad\qquad T_2 = mg \cdot \mu$$

$$m \cdot a = m \cdot g \cdot \mu = mg\frac{h}{S}$$

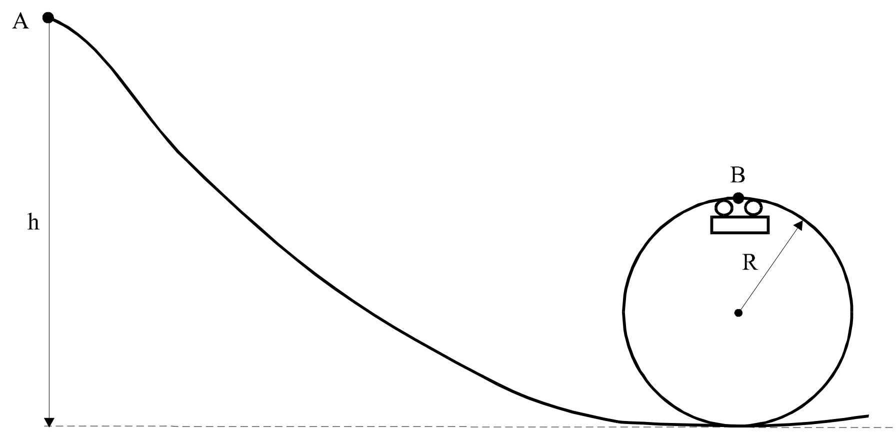
i stąd

$$a = \frac{gh}{S}$$

Zad. 5.5.

Wózek o masie m stacza się bez tarcia po szynach wygiętych tak jak na rysunku. Jaka jest najmniejsza wysokość h, aby wózek nie oderwał się od szyn w najwyższym punkcie pętli kołowej o promieniu R.

Rozwiązanie:



W punkcie A wózek ma energię mechaniczną E^A

$$E^A = E_k^A + E_p^A$$

gdzie $$E_k^A = \frac{m\upsilon_A^2}{2} = 0 \qquad \text{bo w A} \qquad \upsilon = 0$$

$$E_p^A = mgh$$

W punkcie B wózek ma energię mechaniczną E^B

$$E^B = E_k^B + E_p^B$$

$$E_k^B = \frac{m\upsilon_B^2}{2}$$

$$E_p^B = mg \cdot 2R$$

Z prawa zachowania energii

$$E^A = E^B$$

$$mgh = mg2R + \frac{m\upsilon_B^2}{2} \qquad (*)$$

υ_B musi być tak duże aby siła odśrodkowa $\frac{m\upsilon_B^2}{R}$ zrównoważyła ciężar wózka mg

$$\frac{m\upsilon_B^2}{R} = m \cdot g$$

$$\upsilon_B^2 = R \cdot g$$

Znając υ_B równanie (*) możemy zapisać

$$mgh = mg2R + \frac{mRg}{2}$$

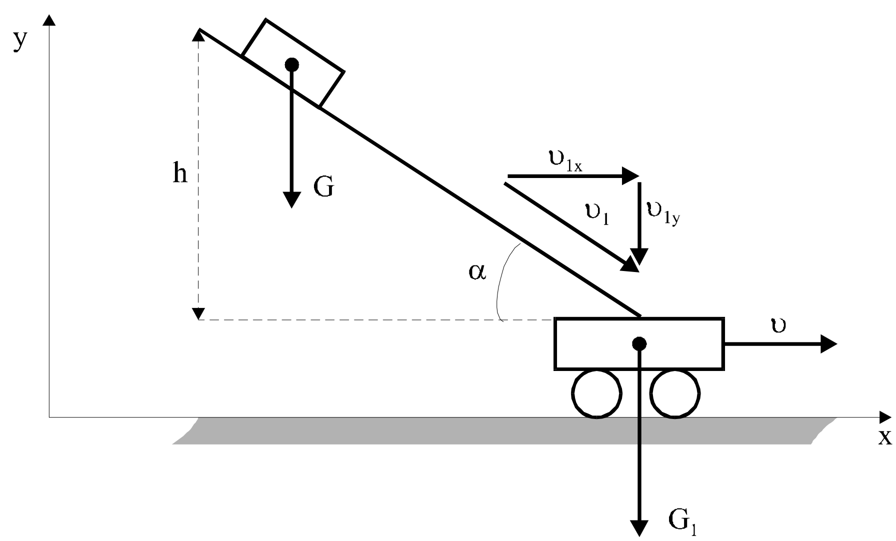
$$h = 2R + \frac{R}{2} = \frac{5}{2}R$$

$$h = \frac{5}{2}R$$

Zad.5.6.

Ciało o ciężarze G ześlizguje się bez tarcia z nachylonej deski na nieruchomą platformę. Jaką prędkość υ uzyska platforma, kiedy ciężar na nią upadnie. Ciężar platformy wynosi G_1, wysokość początkowa położenia ciała nad poziomem platformy wynosi h, a kąt nachylenia deski do poziomu α. Platforma porusza się bez tarcia.

Rozwiązanie:



Ciało o ciężarze G ma masę $m = \frac{G}{g}$

Z prawa zachowania energii obliczamy prędkość υ_1 upadku ciała na platformę

$$mgh = \frac{m\upsilon_1^2}{2}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh}$$

W chwili upadku ciało ma pęd $\vec{p}_1$

$$\vec{p}_1 = m\vec{\upsilon}_1$$

Wektor $\vec{p}_1$ ma składowe

$$p_{1x} = m\upsilon_{1x} = m\upsilon_1 \cdot \cos\alpha$$

$$p_{1y} = m\upsilon_{1y} = m\upsilon_1 \cdot \sin\alpha$$

Ciało o ciężarze G po upadku na platformę o ciężarze G_1 pozostaje na tej platformie.

Masa M platformy wraz z ciałem wynosi zatem

$$M = \frac{G + G_1}{g}$$

Po upadku platforma uzyskuje pęd $\vec{p}_2$

$$\vec{p}_2 = M\vec{\upsilon}$$

Wektor $\vec{p}_2$ ma składowe

$$p_{2x} = M\upsilon$$

$$p_{2y} = 0$$

Z prawa zachowania pędu wynika, że

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2$$

co pociąga $p_{1x} = p_{2x}$

Zatem możemy zapisać

$$\frac{G_1 + G}{g} \cdot \upsilon = \frac{G_1}{g} \cdot \upsilon_{1x}$$

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_1 \cdot \cos\alpha = \sqrt{2gh} \cdot \cos\alpha$$

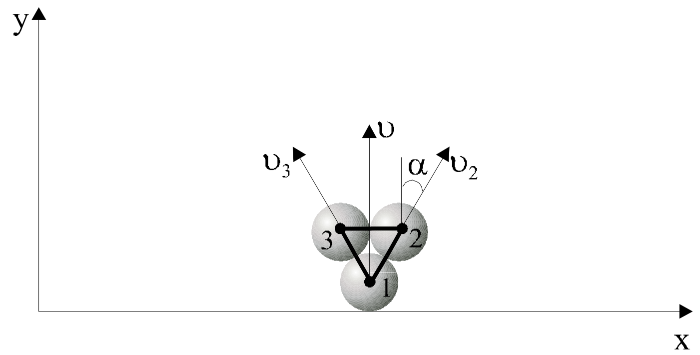
$$\frac{G_1 + G}{g} \cdot \upsilon = \frac{G_1}{g} \cdot \sqrt{2gh} \cdot \cos\alpha$$

$$\upsilon = \frac{G_1}{G_1 + G} \cdot \sqrt{2gh} \cdot \cos\alpha$$

Zad.5.7.

Trzy jednakowe kulki wiszą stykając się na trzech jednakowych niciach o jednakowych długościach. Jedną z kulek odchylono w kierunku prostopadłym do prostej łączącej środki dwóch pozostałych kulek i puszczono swobodnie. Do chwili zderzenia kulka osiągnęła prędkość υ. Jakie prędkości będą posiadały kulki po zderzeniu?

Rozwiązanie:



$\alpha = 30^o;$

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Po zderzeniu pierwsza kulka miała pęd

$\vec{p}_1^{\,I} = m_1\vec{\upsilon}$ i energię kinetyczną $E_{k1}^{I} = \dfrac{m_1\upsilon^2}{2}$

zaś dwie pozostałe kule spoczywały a więc

$p_2^I = p_3^I = 0$ $E_{k1}^I = E_{k2}^I = 0$

Po zderzeniu kule uzyskały odpowiednio prędkości υ_1, υ_2 i υ_3, którym odpowiadają pędy

$$\vec{p}_1^{\,II} = m_1\vec{\upsilon}_1; \quad \vec{p}_2^{\,II} = m_2\vec{\upsilon}_2; \quad \vec{p}_3^{\,II} = m_3\vec{\upsilon}_3$$

oraz energie kinetyczne

$$E_{1k}^{II} = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2}; \quad E_{2k}^{II} = \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}; \quad E_{3k}^{II} = \frac{m_3\upsilon_3^2}{2}$$

Stosując prawo zachowania pędu możemy zapisać

$$\vec{p}_1^{\,I} = \vec{p}_1^{\,II} + \vec{p}_2^{\,II} + \vec{p}_3^{\,II}$$

co, gdy $m_1 = m_2 = m_3 = m$, jest równoważne

(1) $m\upsilon = -m\upsilon_1 + m\upsilon_2 \cdot \cos\alpha + m\upsilon_3 \cdot \cos\alpha$ - dla osi y

(2) $0 = -m\upsilon_3 \cdot \sin\alpha + m\upsilon_2 \cdot \sin\alpha$ - dla osi y

Z (2) wynika, że $\upsilon_2 = \upsilon_3 = \upsilon_{2/3}$

$$m\upsilon = -m\upsilon_1 + 2m\upsilon_{2/3} \cdot \cos\alpha; \quad \upsilon = -\upsilon_1 + \sqrt{3}\upsilon_{2/3}; \quad \upsilon_{2/3} = \frac{\upsilon + \upsilon_1}{\sqrt{3}}$$

Z zasady zachowania energii

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + 2\frac{m\upsilon_{2/3}^2}{2}$$

Po podstawieniu $\upsilon_{2/3} = \dfrac{\upsilon + \upsilon_1}{\sqrt{3}}$ otrzymujemy

$$\upsilon^2 = \upsilon_1{}^2 + \frac{2}{3}\left(\upsilon^2 + 2\upsilon\upsilon_1 + \upsilon_1{}^2\right)$$

$$3\upsilon^2 = 3\upsilon_1{}^2 + 2\upsilon^2 + 4\upsilon\upsilon_1 + 2\upsilon\upsilon_1{}^2$$

$$5\upsilon_1{}^2 + 4\upsilon\upsilon_1 + \upsilon^2 = 0$$

$$\Delta = 16\upsilon^2 + 20\upsilon^2 = 36\upsilon^2 \qquad \sqrt{\Delta} = \pm 6\upsilon$$

$$\upsilon_1 = \frac{-4\upsilon + 6\upsilon}{10} = +\frac{2}{10}\upsilon = +\frac{1}{5}\upsilon$$

$$\upsilon_{2/3} = \frac{\upsilon + \frac{1}{5}\upsilon}{\sqrt{3}} = \frac{6\upsilon}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\upsilon$$