Zadania do rozdziału 7.

Zad.7.1.

W wierzchołkach kwadratu o bokach a umieszczono jednakowe ładunku –q. Jaki ładunek Q o znaku przeciwnym trzeba umieścić w środku kwadratu, aby siła wypadkowa działająca na każdy ładunek była równa zeru?

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy siły działające na ładunek 1. Pozostanie on w równowadze, jeżeli suma sił nań działających będzie równa zeru.

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 = 0$$

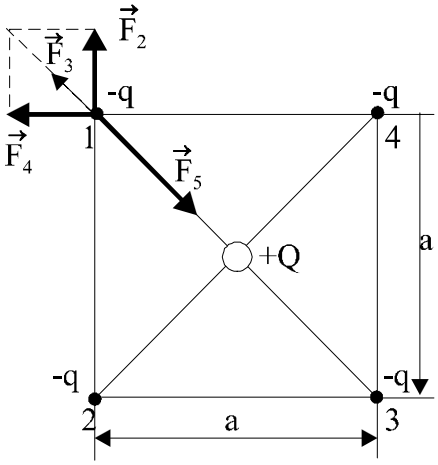
Powyższy warunek jest równoważny

$$\left|\vec{F}'\right| + \left|\vec{F}_3\right| = \left|\vec{F}_5\right| \qquad (*)$$

gdzie $\left|\vec{F}'\right| = \sqrt{F_2^2 + F_4^2}$

Zgodnie z prawem Coulomba

$$F_2 = F_4 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon a^2}; \qquad F' = \frac{q^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon a^2}$$



$$F_3 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\left(a\sqrt{2}\right)^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon a^2}$$

$$F_5 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{qQ}{2\pi\varepsilon a^2}$$

Po podstawieniu powyższych wyrażeń do równania (*) otrzymamy:

$$\frac{q^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon a^2} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon a^2} = \frac{qQ}{2\pi\varepsilon a^2}$$

i stąd

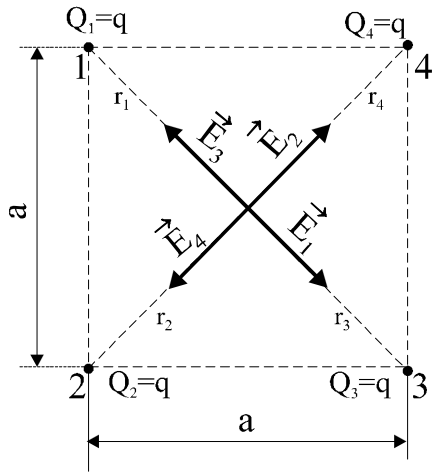
$$Q = \frac{q}{4}\left(1 + 2\sqrt{2}\right)$$

Taki sam tok rozumowania można zastosować dla każdego ładunku Q umieszczonego w pozostałych wierzchołkach kwadratu.

Zad.7.2.

Cztery jednakowe ładunki q umieszczono w narożach kwadratu o bokach a. Znaleźć natężenie i potencjał pola elektrycznego w środku kwadratu?

<u>Rozwiązanie:</u>



Natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ w środku kwadratu wynosi:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4, \text{ gdzie:}$$

$$E_1 = \left|\vec{E}_1\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q\cdot 4}{a^2\cdot 2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon a^2}$$

$$E_2 = \left|\vec{E}_2\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_2}{r_2^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q\cdot 4}{a^2\cdot 2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon a^2}$$

$$E_3 = \left|\vec{E}_3\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_3}{r_3^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q\cdot 4}{a^2\cdot 2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon a^2}$$

$$E_4 = \left|\vec{E}_4\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_4}{r_4^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q\cdot 4}{a^2\cdot 2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon a^2}$$

Widzimy, że $E_1 = E_2 = E_3 = E_4$.

Z geometrii układu ładunków wynika, że

$$\vec{E}_1 = -\vec{E}_3 \text{ i } \vec{E}_4 = -\vec{E}_2,$$

Zatem natężenie pola $\vec{E}$ w środku kwadratu wynosi:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = 0$$

Potencjał V pola elektrycznego w środku kwadratu wynosi:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4, \text{ gdzie:}$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{Q_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q\cdot 2}{a\sqrt{2}} = \frac{q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon a}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{Q_2}{r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q\cdot 2}{a\sqrt{2}} = \frac{q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon a}$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{Q_3}{r_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q\cdot 2}{a\sqrt{2}} = \frac{q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon a}$$

$$V_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q_4}{r_4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q \cdot 2}{a\sqrt{2}} = \frac{q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon a}$$

Widzimy, że $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$.

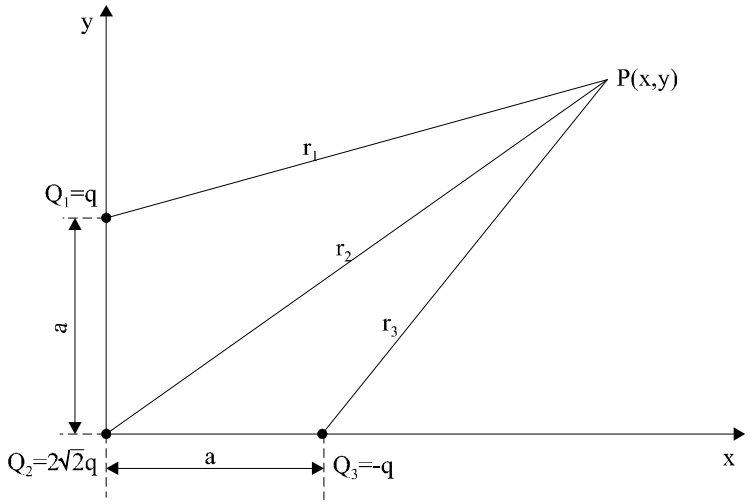
Potencjał V pola elektrycznego w środku kwadratu wynosi

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 4\frac{q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon a} = \frac{q\sqrt{2}}{\pi\varepsilon a}$$

Zad.7.3.

Obliczyć potencjał pola elektrycznego w punkcie o współrzędnych (x,y), dla układu trzech ładunków: $Q_1 = q$, $Q_2 = 2\sqrt{2}q$, $Q_3 = -q$ umieszczonych w punktach o współrzędnych: $Q_1(0,a)$, $Q_2(0,0)$, $Q_3(a,0)$. Wyznaczyć V dla punktu P(a,a).

Rozwiązanie:



Całkowity potencjał pola elektrycznego V(x,y) w dowolnym punkcie P(x,y), można przedstawić jako sumę potencjałów $V(r_1)$, $V(r_2)$ i $V(r_3)$ wytworzonych w tym punkcie przez każdy z ładunków z osobna

$$V(x,y) = V(r_1) + V(r_2) + V(r_3)$$

$$V(r_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r_1}$$

$$V(r_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_2}{r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{2\sqrt{2}\,q}{r_2}$$

$$V(r_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_3}{r_3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r_3}$$

Ale

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r_3 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

Zatem

$$V(x,y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right)$$

Potencjał w punkcie P(a,a) wynosi

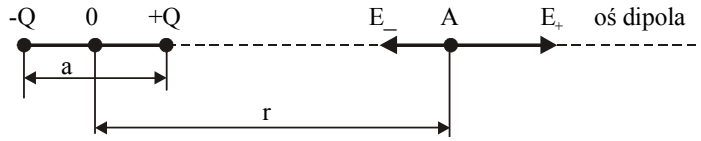
$$V(a,a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{a}\right)$$

$$V(a,a) = \frac{q}{2\pi\varepsilon a}$$

Zad.7.4.

Obliczyć natężenie pola elektrycznego w otoczeniu tzw. dipola elektrycznego, tj. układu dwóch różnoimiennych, jednakowych co do wartości ładunków elektrycznych +Q i –Q, rozsuniętych na odległość a, biorąc pod uwagę tylko punkty leżące na osi dipola (patrz rysunek).

Rozwiązanie:



Weźmy pod uwagę punkt A leżący na osi dipola w odległości r od jego środka 0. Natężenie $\vec{E}_A$ pola w punkcie A jest wypadkową natężeń pól wytwarzanych w punkcie A przez ładunek +Q i –Q. Oba natężenia $\vec{E}_+$ i $\vec{E}_-$ są skierowane wzdłuż tej samej prostej, lecz mają zwroty przeciwne, a zatem ich suma geometryczna sprowadza się do różnicy arytmetycznej:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{Q}{(r-a/2)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{Q}{(r+a/2)^2},$$

$$E_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{(r+a/2)^2-(r-a/2)^2}{(r+a/2)^2(r-a/2)^2},$$

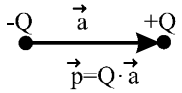
$$E_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{r^2 + ra + a^2/4 - r^2 + ra - a^2/4}{\left(r^2 - a^2/4\right)^2},$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{2Qra}{\left(r^2 - a^2/4\right)^2}$$

Takie jest wyrażenie ogólne na natężenie pola w punktach leżących na osi dipola. Dla punktów leżących daleko od ładunków dipola (tzn. gdy r>>a) otrzymujemy wzór przybliżony

$$E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{2Qa}{r^3}.$$

Iloczyn ładunku Q dipola i odległości a nazywamy momentem dipola. Tę nową wielkość traktujemy jako wektor o kierunku od ładunku ujemnego do ładunku dodatniego dipola i oznaczamy symbolem $\vec{p}$.



A zatem natężenie pola elektrycznego w punktach leżących na osi dipola w odległości r znacznie większej od a wynosi

$$E \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{2p}{r^3}$$

Zad.7.5.

Na powłoce kulistej o promieniu R rozmieszczone są równomiernie ładunki elektryczne z gęstością powierzchniową σ. Znaleźć natężenie pola i potencjał w odległości r od środka kuli.

Rozwiązanie:

Gęstość powierzchniowa σ ładunku mówi nam jaki ładunek elektryczny jest umieszczony na jednostce powierzchni ciała.

$$\sigma = \frac{dq}{ds} \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

Na powłoce kulistej o promieniu R umieszczony jest ładunek Q

$$Q = \sigma \cdot S$$

gdzie $S = 4\pi R^2$ - pole powierzchni kuli.

Ładunek ten umieszczony jest tylko na powierzchni kuli tak, że wewnątrz kuli jak i na zewnątrz nie ma innych ładunków.

Jeżeli współśrodkowo z powłoką kulistą o promieniu R utworzymy (w myślach) powierzchnię kulistą o promieniu r, to na tej powierzchni (zwanej powierzchnią gaussowską) wektor $\vec{E}$ ma stałą wartość i jest zawsze prostopadły do powierzchni ($\vec{E} \| d\vec{s}$) i wtedy $\vec{E} \cdot \vec{d}s = Eds$.

Stosujemy prawo Gaussa, które mówi, że strumień natężenia pola elektrycznego $\Phi_{E,S}$ przez powierzchnię zamkniętą S (przez naszą utworzoną w myślach sferę o promieniu r) jest równy całkowitemu ładunkowi Q zawartemu wewnątrz tej powierzchni (w naszym przypadku ładunkowi Q znajdującego się na powierzchni kuli o promieniu R leżącej wewnątrz kuli o promieniu r) pomnożonemu przez czynnik $\frac{1}{\varepsilon}$.

$$\Phi_{E,S} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{d}s = \frac{1}{\varepsilon} \cdot Q$$

Ale

$$\Phi_{E,S} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{d}s = \oint_S E \cdot ds = E\oint_S ds = E \cdot 4\pi r^2$$

Dla r<R (wewnątrz powłoki kulistej o promieniu R) ładunek Q nie występuje, więc

$$E \cdot 4\pi r^2 = 0$$

i wtedy natężenie pola elektrycznego wewnątrz naładowanej powierzchniowo kuli wynosi zero.

$$E = 0$$

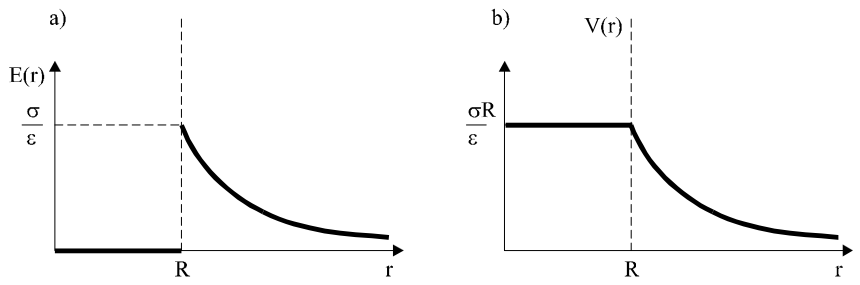
Dla $r \geq R$ czyli w przypadku gdy gaussowska powierzchnia (ta utworzona przez nas w myślach powierzchnia kulista o promieniu r) obejmuje naładowaną powłokę o promieniu R prawo Gaussa możemy zapisać:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot Q$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot 4\pi R^2 \cdot \sigma$$

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon r^2}; \quad \text{dla } r = R \text{ otrzymujemy:} \quad E(R) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Zatem natężenie pola elektrycznego wewnątrz naładowanej powłoki kulistej jest równe zeru, na jej powierzchni osiąga wartość σ/ε, następnie maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości i jest skierowane prostopadle do powierzchni kuli (rys.a).



Potencjał pola V wyznaczamy korzystając z wzoru definicyjnego, że

$$V_A = \frac{W_{A\infty}}{q_0}$$

Dla r>R

$$W_{A\infty} = \int_r^\infty \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty q_0 \cdot \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty q_0 \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{R^2}{r^2} dr$$

$$W_{A\infty} = \frac{q_0 R^2 \sigma}{\varepsilon} \int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_0 R^2 \sigma}{\varepsilon} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_r^\infty$$

$$W_{A\infty} = \frac{q_0 R^2 \sigma}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{r} \qquad \text{i wtedy}$$

$$V(r) = \frac{R^2 \sigma}{\varepsilon r}; \quad \text{dla } r = R \text{ otrzymujemy:} \qquad V(R) = \frac{\sigma \cdot R}{\varepsilon}$$

Dla $r \le R$

$$W_{A\infty} = \int_r^\infty q_0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R q_0 0 \cdot dr + \int_R^\infty q_0 \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{R^2}{r^2} dr$$

$$W_{A\infty} = 0 + q_0 \frac{\sigma R^2}{\varepsilon} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_R^\infty$$

$$W_{A\infty} = \frac{q_0 R \sigma}{\varepsilon}$$

i wtedy

$$V(r) = \frac{R \cdot \sigma}{\varepsilon r} = \text{const}$$

Wykres funkcji V(r) przedstawia rys. b.

Zad. 7.6.

Znaleźć natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ w odległości r od nieskończenie długiej prostoliniowej nici naładowanej ładunkiem elektrycznym z gęstością liniową λ.

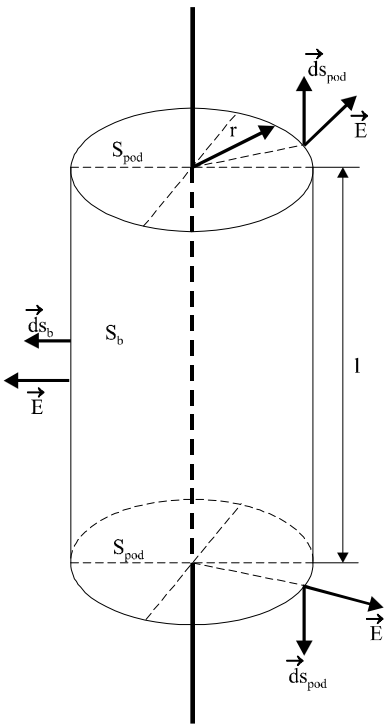
Rozwiązanie:

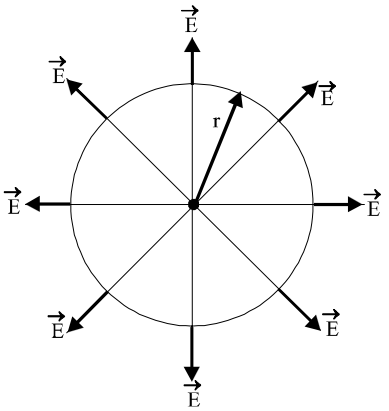
Gęstość liniowa ładunku λ mówi nam jaki ładunek elektryczny jest umieszczony na jednostce długości nici.

$$\lambda = \frac{dQ}{dl}\left[\frac{C}{m}\right]$$

Na odcinku nici o długości l umieszczony jest ładunek Q

$$Q = \lambda \cdot l$$





Z symetrii układu (rozkładu ładunku) wynika, że natężenie poła $\vec{E}$ będzie skierowane prostopadle do powierzchni bocznej nici.

Opierając się na twierdzeniu Gaussa możemy zapisać:

$$\Phi_{E,S} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

gdzie S jest powierzchnią walca współśrodkowego z nicią o wysokości l i promieniu r.

$$\Phi_{E,S} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_{S_b} \vec{E} \cdot \vec{ds}_b + 2\int_{S_{pod}} \vec{E} \cdot \vec{ds}_{pod}$$

Ostatni człon w tym wyrażeniu znika, gdyż strumień przechodzący przez podstawę walca jest równy zeru, ponieważ $\vec{ds}_{pod} \perp \vec{E}$, co czyni, że: $\vec{E} \cdot \vec{ds}_{pod} = 0$.

Ze względu na stałą wartość $\left|\vec{E}\right|$ na powierzchni bocznej walca zachodzi:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_{S_b} \vec{E} \cdot \vec{ds}_b = E\int_{S_b} \vec{ds} = E2\pi r \cdot l$$

Zatem

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\varepsilon} \cdot Q$$

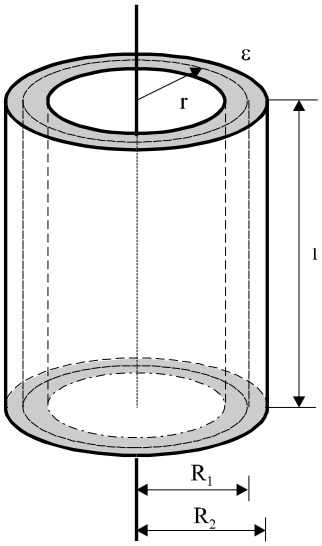
$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \lambda \cdot l$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

Zad.7.7.

Obliczyć pojemność C kondensatora cylindrycznego o promieniach elektrod (cylindrów) R_1 i R_2 oraz długości l, wypełnionego dielektrykiem o przenikalności elektrycznej ε.

Rozwiązanie:



Wychodzimy ze wzoru definicyjnego pojemności

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{U}$$

Gdzie U to napięcie, (czyli różnica potencjałów $\Delta V = V_1 - V_2$ między elektrodami kondensatora.

Na wewnętrznej elektrodzie cylindrycznej o promieniu R_1 znajduje się ładunek Q równomiernie rozłożony na tej elektrodzie.

Z symetrii rozkładu ładunku wynika, że natężenie pola $\vec{E}$ w przestrzeni między elektronowej będzie skierowane prostopadle do powierzchni pobocznicy walca (elektrody).

Jako powierzchnię Gaussa wybieramy powierzchnię walca o promieniu r i wysokości l, którego oś symetrii pokrywa się z osią kondensatora (z osiami walców o R_1 i R_2).

Opierając się na twierdzeniu Gaussa możemy zapisać

$$\Phi_{E,S} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

gdzie $S = S_b + 2S_{pod}$ jest powierzchnią całkowitą walca o promieniu r i wysokości l. Na wielkość tej powierzchni S składa się powierzchnia pobocznicy walca $S_b = 2\pi r \cdot l$

oraz dwie powierzchnie podstawy $S_{pod} = \pi r^2$ Zatem

$$\Phi_{E,S} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_{S_b} \vec{E} \cdot \vec{ds}_b + 2 \int_{S_{pod}} \vec{E} \cdot \vec{ds}_{pod}$$

Ostatni człon w tym wyrażeniu zanika, gdyż strumień przechodzący przez podstawy walca jest równy zeru ponieważ dla l>>r $\vec{ds}_{pod} \perp \vec{E}$ co czyni, że: $\vec{E} \cdot \vec{ds}_{pod} = 0$.

Ze względu na stałą wartość $\left|\vec{E}\right|$ na powierzchni bocznej walca gaussowskiego zachodzi:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_{S_b} \vec{E} \cdot \vec{ds} = E \int_{S_b} ds = E 2\pi r \cdot l$$

czyli $$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\varepsilon} \cdot Q; \qquad E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \cdot \frac{1}{r}$$

Znając E w przestrzeni międzyelektronowej obliczamy U

$$U = \Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E(r) \cdot dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} (\ln r)\Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \cdot (\ln R_2 - \ln R_1) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Ostatecznie pojemność C kondensatora wynosi

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

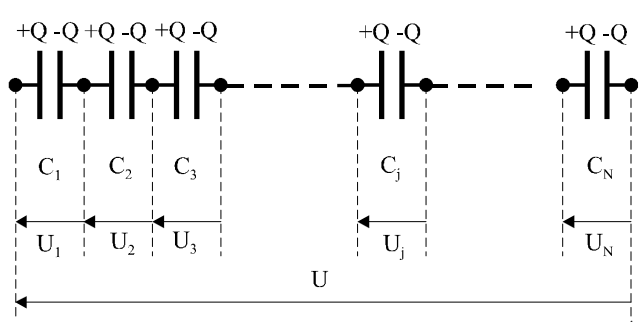
$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Zad.7.8.

N kondensatorów o pojemnościach $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_j, \ldots, C_N$ połączono w baterię raz szeregowo, raz równoległe. Oblicz pojemność elektryczną powyższych baterii kondensatorów.

<u>Rozwiązanie:</u>

a) połączenie szeregowe



Napięcie U przyłożone do baterii N szeregowo połączonych kondensatorów jest równe sumie spadków napięć na poszczególnych kondensatorach

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots \quad + U_j + \ldots \quad + U_N \qquad (*)$$

Na okładce każdego kondensatora zgromadzony jest jednakowy ładunek Q.

Z definicji pojemności C wynika, że

$$C = \frac{Q}{U}; \qquad U_1 = \frac{Q}{C_1};\ U_2 = \frac{Q}{C_2};\ U_3 = \frac{Q}{C_3};\ldots \qquad U_j = \frac{Q}{C_j};\ldots \qquad U_N = \frac{Q}{C_N}$$

Po podstawieniu do (*) otrzymujemy:

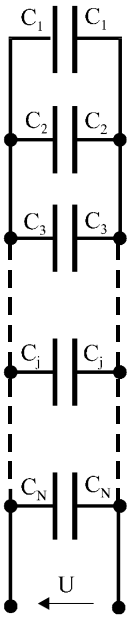
$$U = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots \quad + \frac{1}{C_j} + \ldots \quad \frac{1}{C_N}\right)$$

$$\frac{1}{C_{WS}} = \frac{U}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots \quad + \frac{1}{C_j} + \ldots \quad + \frac{1}{C_N}$$

Ostatecznie bateria kondensatorów utworzona z N kondensatorów połączonych szeregowego ma pojemność C_{WS} taką, że

$$\frac{1}{C_{WS}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots \quad + \frac{1}{C_j} + \ldots \quad + \frac{1}{C_N}$$

a) połączenie równoległe



Przy połączeniu równoległym kondensatorów na każdym kondensatorze panuje to samo napięcie U, ale zgromadzony jest na ich elektrodach inny ładunek.

Zatem ładunek całkowity Q zgromadzony w baterii kondensatorów o pojemności C_{WR} wynosi

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots \quad + Q_j + \ldots \quad + Q_N \qquad (**)$$

Z definicji pojemności C wynika, że:

$$C = \frac{Q}{U};$$

$$Q_1 = C_1 U,\ Q_2 = C_2 U,\ \ldots \quad , Q_j = C_j U, \ldots \quad , Q_N = C_N U$$

oraz $\quad Q = C_{WR} \cdot U$

Po podstawieniu do (**) otrzymujemy

$$C_{WR} \cdot U = C_1 U + C_2 U + C_3 U + \ldots \quad + C_j U + \ldots \quad + C_N \cdot U$$

Ostatecznie $C_{WR} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots \quad + C_j + \ldots \quad + C_N$