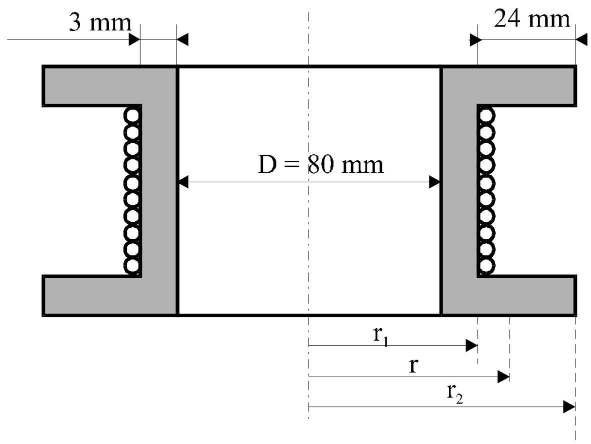
Zadania do rozdziału 9.

Zad. 9.1.

Oblicz opór elektryczny cewki, składającej się z n = 900 zwojów izolowanego drutu miedzianego o średnicy d = 1mm (w izolacji 1,2 mm) w temperaturze t = 60 ^{o}C. Wymiary cewki przedstawiono na rysunku



<u>Rozwiązanie:</u>

Wychodzimy ze wzoru:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

gdzie: R – opór cewki w temperaturze pokojowej (t=20^{o}C),

$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ [\Omega m]$ - opór właściwy miedzi (patrz tabela 9.1),

l – długość nawiniętego na cewkę drutu miedzianego,

$S = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ – pole przekroju poprzecznego drutu.

Z powodu braku danych co do długości cewki, długość l nawiniętego na cewkę drutu obliczamy (w przybliżeniu) ze wzoru:

$$l = n \cdot l'$$

gdzie: l' – to średnia długość jednego zwoju.

$$l' = 2\pi r$$

gdzie: r – to średnia wartość promienia zwoju.

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Z rysunku wynika, że

$$r_1 = 40 + 3 = 43\,\text{mm} = 0.0043\,\text{m}$$

$$r_2 = 40 + 3 + 24 = 67\,\text{mm} = 0.0067\,\text{m}$$

Stąd

$$r = \frac{0.043 + 0.067}{2} = \frac{0.110}{2} = 0.055\,\text{m}$$

Zatem $\quad l = n \cdot 2\pi r \quad$ i

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} = \rho \frac{4 \cdot n \cdot 2\pi r}{\pi d^2}$$

$$R = 1.7 \cdot 10^{-8}\,\Omega\text{m} \cdot \frac{4 \cdot 900 \cdot 2 \cdot 0.055\,\text{m}}{0.000001\,\text{m}} = 6.73\,\Omega$$

Opór elektryczny cewki R_t w temperaturze t= 60°C obliczamy wg wzoru (9.7)

$$R_t = R\left[1 + \alpha\left(T - T_o\right)\right]$$

gdzie: $\alpha = 3.9 \cdot 10^{-3}\,[1/K]$ - temperaturowy współczynnik oporu miedzi (patrz tabela 9.2),

$T_o = (273.16 + 20)\,[K]$ - temperatura pokojowa,

$T_o = (273.16 + t)\,[K]$ - temperatura dla której wyznaczamy R.

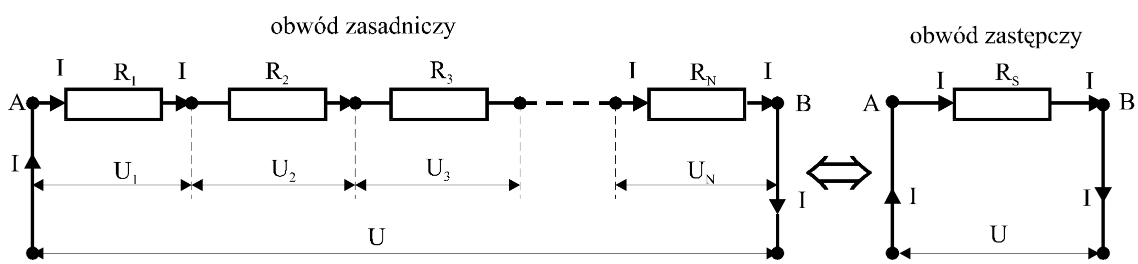
$$R_t = 6.73\Omega\left[1 + 3.9 \cdot 10^{-3}\,1/K \cdot 40\,K\right] = 7.78\Omega$$

Opór elektryczny cewki, który w temperaturze pokojowej (t=20°C) wynosił R = 6.73 Ω, wzrósł do wartości R_t =7.78 Ω w temperaturze t = 60°C.

Zad. 9.2.

Wyznaczyć opór wypadkowy R_S dla N oporników (o oporach $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_i, \ldots, R_N$) połączonych szeregowo.

<u>Rozwiązanie:</u>



Gdy do N oporników połączonych szeregowo podłączymy napięcie U to przez każdy opornik płynie prąd elektryczny o takim samym natężeniu I (I prawo Kirchoffa dla węzła z dwoma przewodnikami). Zatem zgodnie z prawem Ohma, na oporniku R_1 mamy spadek napięcia $U_1 = IR_1$

na oporniku R_2 mamy spadek napięcia $U_2 = IR_2$

na oporniku R_3 mamy spadek napięcia $U_3 = IR_3$

na oporniku R_i mamy spadek napięcia $U_i = IR_i$

na oporniku R_N mamy spadek napięcia $U_N = IR_N$

Na wszystkich U opornikach połączonych szeregowo mamy spadek napięcia U:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_i + \ldots + U_N$$

Czyli

$$U = IR_1 + IR_2 + IR_3 + \ldots + IR_i + \ldots + IR_N$$

$$U = I(R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_i + \ldots + R_N) \qquad (1)$$

Opór wypadkowy (zastępczy)R_S jest to opór, który podłączony do zacisków A i B obwodu (w miejsce N oporników połączonych w szereg) nie spowoduje zmiany prądu I dopływającego do węzła A i wypływającego z węzła B.

Dla obwodu zastępczego możemy zapisać:

$$U = I \cdot R_S \qquad (2)$$

Z porównania równań (1) i (2) otrzymujemy:

$$I \cdot R_S = I \cdot (R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_i + \ldots + R_N)$$

Stąd

$$R_S = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_i + \ldots + R_N$$

Przy połączeniu oporników szeregowo, napięcia na poszczególnych opornikach sumują się, a natężenie prądu we wszystkich opornikach jest takie samo.

Zatem opór wypadkowy takiego połączenia wynosi:

$$R_S = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

Zad. 9.3.

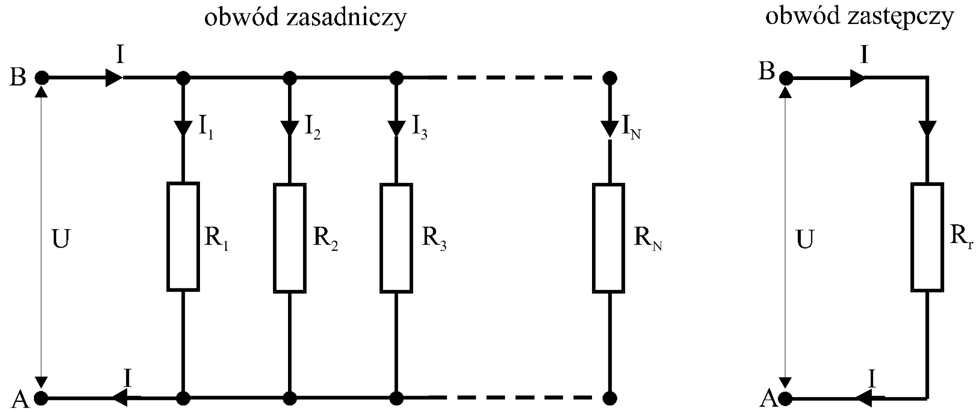
Wyznaczyć opór wypadkowy R_r dla N oporników (o oporach $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_i, \ldots, R_N$) połączonych równolegle.

<u>Rozwiązanie:</u>

Gdy do N oporników połączonych równolegle podłączymy napięcie U to na każdym oporniku panuje to samo napicie U.

Z I prawa Kirchoffa wynika, że natężenie prądu I jest sumą natężeń prądów płynących w poszczególnych opornikach

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_i + ... + I_N$$



Ale przez opornik R_1 płynie prąd $I_1 = U / R_1$

przez opornik R_2 płynie prąd $I_2 = U / R_2$

przez opornik R_3 płynie prąd $I_3 = U / R_3$

przez opornik R_i płynie prąd $I_i = U / R_i$

przez opornik R_N płynie prąd $I_N = U / R_N$

Zatem
$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + ... + \frac{U}{R_i} + ... + \frac{U}{R_N}$$

$$I = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ... + \frac{1}{R_i} + ... + \frac{1}{R_N}\right) \quad (1)$$

Opór wypadkowy (zastępczy) R_r jest to opór, który podłączony do zacisków A i B obwodu (w miejsce N oporników połączonych równolegle) nie spowoduje zmiany prądu I dopływającego do węzła A i wypływającego z węzła B.

Dla obwodu zastępczego możemy zapisać:

$$I = \frac{U}{R_S} \quad (2)$$

Z porównania równań (1) i (2) otrzymujemy:

$$\frac{U}{R_S} = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ... + \frac{1}{R_i} + ... + \frac{1}{R_N}\right)$$

Stąd $$\frac{1}{R}=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\ldots\quad+\frac{1}{R_i}+\ldots\quad+\frac{1}{R_N}\right)$$

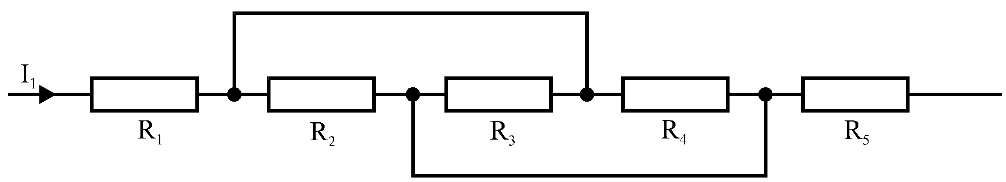
Przy połączeniu równoległym oporników, napięcia na wszystkich opornikach są te same, natomiast natężenie prądu jest sumą natężeń prądów płynących w poszczególnych opornikach.

Zatem opór wypadkowy takiego połączenia wyraża się wzorem:

$$\frac{1}{R_r}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{R_i}$$

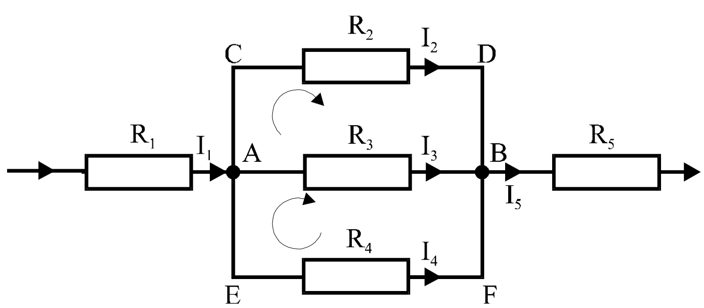
Zad. 9.4

Pięć oporników $R_1 = 1\,k\Omega$, $R_2 = 2\,k\Omega$, $R_3 = 3\,k\Omega$, $R_4 = 4\,k\Omega$ i $R_5 = 5\,k\Omega$ połączono w sposób przedstawiony na rysunku. Przez R_1 płynie prąd o natężeniu I_1 = 0,2 A. Obliczyć natężenie prądów płynących w pozostałych rezystorach.



Rozwiązanie:

Schemat połączeń można przerysować w postaci



Dla węzła A I prawo Kirchoffa ma postać:

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0; \quad I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \qquad (1)$$

Dla węzła B I prawo Kirchoffa ma postać:

$$I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = 0; \quad I_5 = I_2 + I_3 + I_4 \qquad (2)$$

Stosując II prawo Kirchoffa dla oczka ACDB otrzymujemy:

$$I_2R_2 - I_3R_3 = 0 \qquad (3)$$

Stosując II prawo Kirchoffa dla oczka ABFE otrzymujemy:

$$I_3R_3 - I_4R_4 = 0 \qquad (4)$$

Poszukujemy czterech niewiadomych (I_2, I_3, I_4 i I_5) i mamy do dyspozycji cztery równania (1, 2, 3 i 4).

Rozwiązując powyższy układ czterech równań otrzymujemy:

Z porównania równań (1) i (2) wynika, że:

$$I_5 = I_1 = 0.2\,\mathrm{A}$$

Wyznaczając z równania (1) $I_2 = I_1 - I_3 - I_4$ i podstawiając tę wartość do (3) otrzymujemy:

$$I_3 = \frac{I_1 R_2 + I_4 R_2}{R_2 + R_3}$$

I_3 podstawiamy do równania (4) i otrzymujemy:

$$I_4 = I_1 \Big/ \left(1 + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3}\right) = 0.039\,\mathrm{A}$$

Podobnie wyznaczamy: I_2 i I_3

$$I_2 = I_1 \Big/ \left(1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_4}\right) = 0.097\,\mathrm{A}$$

$$I_3 = I_1 \Big/ \left(1 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_4}\right) = 0.064\,\mathrm{A}$$

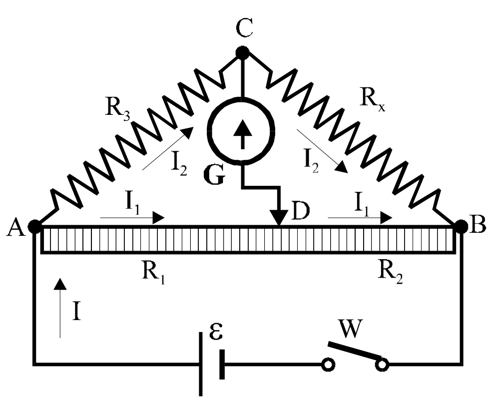
Na koniec sprawdzamy poprawność otrzymanych wyników

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4; \qquad 0{,}2=0{,}039+0{,}097+0{,}064$$

Zad. 9.5

Wyprowadzić warunek równowagi mostka Wheatstone'a (przyrządu do pomiaru nieznanego oporu R_x) którego schemat przedstawionego na rysunku.

Rozwiązanie:



Obwód mostka składa się ze źródła napięcia ε, reochordu AB czyli drutu oporowego o stałym przekroju S rozciągniętego na tle podziałki liniowej (linijki) od A do B, opornika wzorcowego R_3, opornika o oporze badanym R_x, galwanometru G, suwaka na reochordzie D, klucza W oraz przewodów łączących.

Przy włączonym kluczu W, na drucie oporowym AB (na reochordzie) można znaleźć taki punkt D, w którym potencjał $V_D = V_C$. Doświadczalnie znajdujemy położenie tego punktu przesuwając ruchomy suwak wzdłuż reochordu do takiego położenia, aby wskazówka galwanometru G włączonego między punktami C i D nie odchylała się od zera. Takie zachowanie wskazówki galwanometru świadczy o tym, że między punktami C i D nie ma różnicy potencjałów (czyli $V_D = V_C$ a więc prąd między tymi punktami nie płynie).

W punktach A i B mamy węzły obwodu. W węźle a prąd I płynący od źródła dzieli się na prąd I_1 płynący przez drut reochordu AB, i prąd I_2 płynący przez oporniki R_3 i R_x.

Zgodnie z pierwszym prawem Kirchoffa mamy:

$$I = I_1 + I_2$$

Stosując drugie prawo Kirchoffa odpowiednio dla oczka ACD i DCB otrzymujemy:

$$I_2 R_3 = I_1 R_1$$

$$I_2 R_x = I_1 R_2$$

Stąd (dzieląc stronami powyższe równania):

$$\frac{R_3}{R_x} = \frac{R_1}{R_2}$$

Pamiętając o pierwszym prawie Ohma możemy zapisać:

$$R_1 = \rho \frac{l_1}{S} \qquad \text{i} \qquad R_2 = \rho \frac{l_2}{S}$$

i wtedy

$$R_x = R_3 \cdot \frac{l_2}{l_1}$$

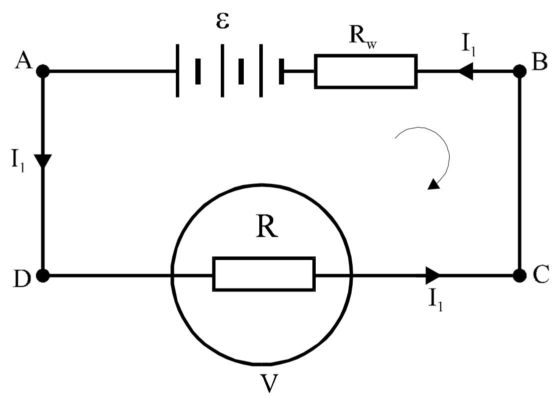
gdzie l_1 i l_2 są odległościami AD i DB drutu oporowego, odczytanymi bezpośrednio na skali podziałki liniowej reochordu.

Jak widzimy pomiar oporu metodą mostka Wheatstone'a jest pomiarem względnym, wymaga bowiem znajomości oporu wzorcowego R_3. W zasadzie mierząc długości l_1 i l_2 otrzymujemy dane potrzebne do ustalenia stosunku R_x do R_3.

Zad. 9.6.

Bateria akumulatorów o oporności wewnętrznej $R_w = 0.5\,\Omega$ ma siłę elektromotoryczną ε = 220 V. Oblicz napięcie U_1 na zaciskach baterii mierzone woltomierzem o oporności R = 5000Ω, oraz napięcie U_2 (mierzone tym samym woltomierzem przy poborze z baterii prądu o natężeniu I = 24 A.

Rozwiązanie:



Natężenie prądu I_1 płynącego przez woltomierz obliczamy z drugiego prawa Kirchoffa dla oczka ABCD.

$$I_1 R_w + I_1 R = \varepsilon;$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_W}$$

Stąd napięcie U_1 na zaciskach A i B baterii:

$$U_1 = I_1 R_1 = \varepsilon - I_1 R_w$$

$$U_1 = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{R_1 + R_w} \cdot R = \varepsilon\left(1 - \frac{R_w}{R_1 + R_w}\right)$$

$$U_1 = 220\,\mathrm{V}\left(1 - \frac{0.5\,\Omega}{5000\,\Omega + 0.5\,\Omega}\right) = 220 \cdot 0.9999\,\mathrm{V}$$

$$U_1 \approx 220\,\mathrm{V}$$

Widzimy, że napięcie U_1 mierzone przez woltomierz będzie tym bliższe wartości siły elektromotorycznej ε baterii im większy będzie opór wewnętrzny R woltomierza.

Po włączeniu obciążenia zewnętrznego pobierającego prąd o natężeni I =24 A napięcie U_2 na zaciskach AB wyniesie:

$$U_2 = \varepsilon - IR_w$$

$$U_2 = 220\,\mathrm{V} - 24\mathrm{A} \cdot 0.5\,\Omega = 220\,\mathrm{V} - 12\,\mathrm{V} = 208\,\mathrm{V}$$

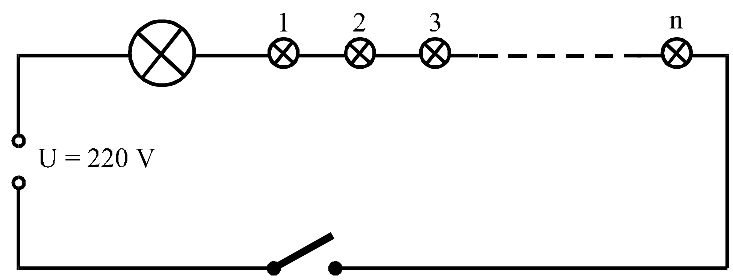
Widzimy, że przy obciążeniu baterii napięcie U_2 na jej biegunach jest znacznie mniejsze od siły elektromotorycznej ε.

Zad. 9.7.

Zaprojektować instalację oświetleniową choinki włączoną do sieci o napięciu U = 220 V i złożoną z szeregowego połączenia jednej dużej żarówki o mocy P = 40 W i napięciu znamionowym $U_1 = 220V$ oraz kilkunastu żaróweczek latarkowych o napiciu znamionowym $U_2 = 3{,}8V$ i natężeniu $I_2 = 0{,}1A$.

Oblicz niezbędną ilość żaróweczek n.

Rozwiązanie:



Moc P dużej żarówki wyraża się wzorem:

$$P = U_1 \cdot I_1 \qquad (1)$$

gdzie I_1 jest natężeniem prądu płynącego przez żarówkę gdy jest ona podłączona do napięcia znamionowego U_1.

Zgodnie z prawem Ohma odporność R_1 dużej żarówki opisuje równanie:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} \qquad (2)$$

Stąd

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} \qquad (3)$$

Podstawiając (3) do (1) otrzymujemy:

$$P = U_1 \cdot \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_1^2}{R_1} \qquad (4)$$

Znając P i U_1 (dane w zadaniu) obliczamy R_1:

$$R_1 = \frac{U_1^2}{P} \qquad (5)$$

Prawo Ohma dla małej żaróweczki możemy zapisać:

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} \qquad (6)$$

gdzie R_2 jest opornością małej (latarkowej) żaróweczki.

Ponieważ „duża żarówka” jest połączona w szereg z n „małych żaróweczek”, oporność R całej instalacji choinkowej wynosi:

$$R = R_1 + nR_2 \qquad (7)$$

Ilość n małych żaróweczek należy tak dobrać aby prąd I płynący w instalacji

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + nR_2} \qquad (8)$$

był równy prądowi dopuszczalnemu dla małych żaróweczek czyli

$$I = I_2 \qquad (9)$$

Stąd

$$I_2 = \frac{U}{R_1 + nR_2} \qquad (10)$$

Z (10) wyliczamy n

$$n = \frac{1}{R_2}\left(\frac{U}{I_2} - R_1\right) \qquad (11)$$

Po podstawieniu (6) za R_2 i (5) za R_1 otrzymujemy:

$$n = \frac{I_2}{U_2}\left(\frac{U}{I_2} - \frac{U_1{}^2}{P}\right)$$

$$n = \frac{0{,}1\text{A}}{3{,}8\text{V}}\left(\frac{220\text{V}}{0{,}1\text{A}} - \frac{(220)^2\,\text{V}^2}{40\text{V}\cdot\text{A}}\right) = 26$$

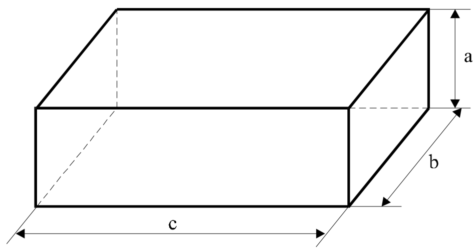
$$n = 26$$

Zad. 9.8

Stalową płytę prostopadłościenną o wymiarach a = 80 mm, b = 100 mm i c = 150 mm zanurzono w wannie galwanicznej z roztworem soli niklowej i połączono z ujemnym biegunem źródła prądu. Anodę stanowi zanurzona w elektrolicie płyta niklowa o gęstości ρ = 8,9 g/cm^3. Obliczyć czas t potrzebny na poniklowanie ścian płyty, jeżeli natężenie prądu płynącego przez elektrolit ma wartość I = 25 A, a grubość warstwy niklu wynosi d=0,04 mm.

Rozwiązanie:

Obliczamy powierzchnię całkowitą S płyty stalowej



$$S = 2ab + 2ca + 2cb$$

$$S = 2 \cdot 0{,}08m \cdot 0{,}10m + 2 \cdot 0{,}15m \cdot 0{,}08m +$$
$$+ 2 \cdot 0{,}15m \cdot 0{,}10m =$$
$$(0{,}016 + 0{,}024 + 0{,}030)m^2$$

$$S = 0{,}07m^2$$

Jeżeli powierzchnię S pokrywa warstwa niklu o grubości d to objętość V tej warstwy wynosi:

$$V = S \cdot d$$

$$V = 0{,}07m^2 \cdot 0{,}0004m = 0{,}0000028m^3$$

$$V = 28 \cdot 10^{-7} m^3$$

Znając V i ρ warstwy niklu obliczamy masę m tej warsty

$$m = \rho \cdot V \qquad (1)$$

$$m = 8{,}9 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 28 \cdot 10^{-7} m^3 = 249{,}2 \cdot 10^{-4} kg$$

$$m = 0{,}02492 \text{ kg}$$

Zgodnie z pierwszym prawem elektrolizy Faradaya masa ta jest równa:

$$m = k \cdot I \cdot t \qquad (2)$$

gdzie $k = 3{,}04 \cdot 10^{-7} kg / A \cdot s$ - to równoważnik elektrochemiczny niklu (patrz tabela 9.3).

Porównując (1) i (2) otrzymujemy:

$$\rho V = kIt$$

Stąd

$$t = \frac{\rho V}{kI} = \frac{0{,}02492[kg]}{3{,}04 \cdot 10^{-7} [kg / A \cdot s] \cdot 25[A]} = 0{,}00033 \cdot 10^7 s$$

$$t = 33 \cdot 10^{-5} \cdot 10^7 s = 33 \cdot 10^2 s = 3300s$$

$$t = 3300s = 55 \min$$