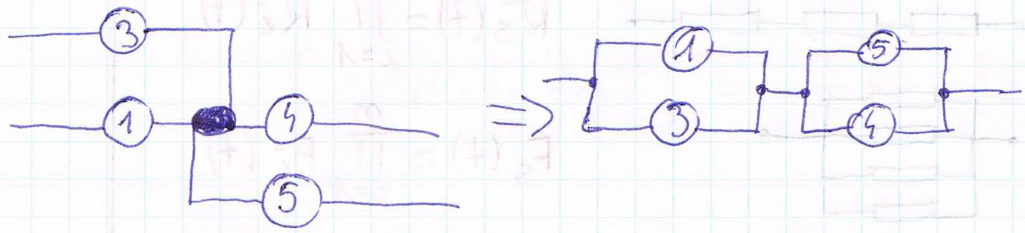
NSK | ĆW 1 | 1

Zad 1.

$$f^{(5)}(x) = x_1x_2x_4 + (x_1+x_3)(x_4+x_5) + x_1x_3(x_4+x_5) =$$
$$= \cancel{x_1x_2x_4} + x_1x_4 + x_1x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + \cancel{x_1x_3x_4} + \cancel{x_1x_3x_5} =$$
$$= x_1x_4 + x_1x_5 + x_3x_4 + x_3x_5$$

(MFA) → minimalne ścieżki zdatności
Minimalne formuły alternatywne

$W_1 = \{x_1x_4\}$
$W_2 = \{x_1x_5\}$
$W_3 = \{x_3x_4\}$
$W_4 = \{x_3x_5\}$



I sposób:

Wyznaczenie cięcia:

$$f^{(5)}(x) = x_1x_4 + x_1x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 = x_1(x_4+x_5) + x_3(x_4+x_5) = (x_1+x_3)(x_4+x_5)$$

$x_1 + x_3 \rightarrow$ cięcie
$x_4 + x_5 \rightarrow$ cięcie

(MFK) → minimalne cięcie
Minimalne formuły koniunkcyjne

II Sposób wykorzystanie funkcji dualnej

- zamieniamy wszystkie znaki alternatywy na znaki koniunkcji, a znaki koniunkcji na znaki alternatywy

$$f^{(5)}(x) = x_1x_2x_4 + (x_1+x_3)(x_4+x_5) + x_1x_3(x_4+x_5) =$$
$$(x_1+x_2+x_4)(x_1x_3 + x_4x_5)((x_1+x_3)+x_4x_5) =$$
$$(x_1x_3 + \cancel{x_1x_4x_5} + \cancel{x_1x_2x_3} + \cancel{x_2x_4x_5} + \cancel{x_1x_3x_4} + x_4x_5)(x_1+x_3+x_4x_5) =$$
$$(x_1x_3 + x_4x_5)(x_1+x_3+x_4x_5) = x_1x_3 + \cancel{x_1x_4x_5} + x_1x_3 + \cancel{x_3x_4x_5} +$$
$$+ \cancel{x_1x_3x_4x_5} + x_4x_5 = x_1x_3 + x_4x_5$$

$[MFA]_D$ → też wyznacza cięcia

Zad 2

$$f^{(5)}(x) = (x_1x_2 + x_3)x_4 + x_5$$

elementy systemu są identyczne, niezależne

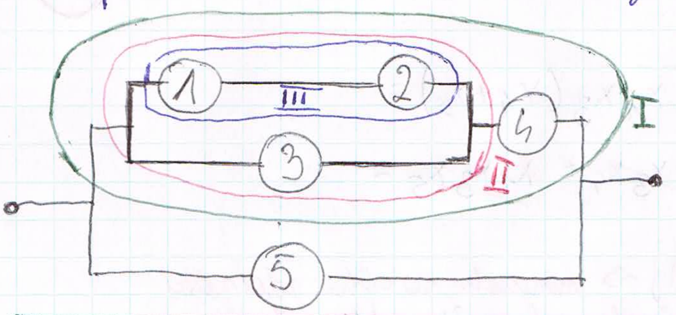
$F_i(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0$

$R_i(t) = e^{-\lambda t}$

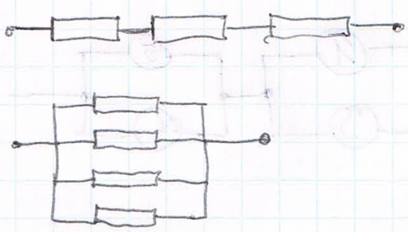
$F(t) = P\{T < t\}$ dystrybuanta zmiennej losowej T, prawdopodobieństwo, że czas do uszkodzenia obiektu jest mniejszy od t

$R(t) = P\{T \geq t\}$ - prawdopodobieństwo, że czas do uszkodzenia obiektu jest większy od zadanej chwili t

Prawdopodobieństwo zdolności systemu w chwili t: [$R_S(t)$]:



Wyznaczenie podsystemów



$$R_S(t) = \prod_{i=1}^{m} R_i(t)$$

$$F_S(t) = \prod_{i=1}^{m} F_i(t)$$

$$R_S(t) = 1 - F_S(t)$$

Obliczone jest od tyłu:

$$F_S(t) = F_5(t) \cdot F_I(t)$$

$$R_I(t) = R_4(t) \cdot R_{III}(t)$$

$$F_{II}(t) = F_3(t) \cdot F_{III}(t)$$

$$R_{III}(t) = R_1(t) \cdot R_2(t)$$

$$R_{III}(t) = e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} = e^{-2\lambda t}$$

$$F_{II}(t) = (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-2\lambda t}) = 1 - e^{-2\lambda t} - e^{-\lambda t} + e^{-3\lambda t}$$

$$R_I(t) = e^{-\lambda t} \cdot (\cancel{1} - \cancel{1} + e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t} - e^{-3\lambda t}) =$$
$$= e^{-2\lambda t} + e^{-3\lambda t} - e^{-4\lambda t}$$

$$F_S(t) = (1 - e^{-\lambda t}) \cdot (1 - e^{-2\lambda t} - e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t}) =$$
$$(1 - e^{-2\lambda t} - \cancel{e^{-3\lambda t}} + e^{-4\lambda t} - e^{-\lambda t} + \cancel{e^{-3\lambda t}} + e^{-4\lambda t} - e^{-5\lambda t}) =$$
$$= 1 - e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t} + 2e^{-4\lambda t} - e^{-5\lambda t}$$

$$R_S(t) = e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t} - 2e^{-4\lambda t} + e^{-5\lambda t}$$

$R_S(0) = 1 + 1 - 2 + 1 = 1$ // sprawdzenie, jeżeli jest 1, to dobre rozwiąza

Obliczenie wartości oczekiwanej zdatności tego systemu

$$E\{T\} = \Theta = \int_0^\infty t\cdot f(t)\,dt = \int_0^\infty [1-F(t)]\,dt = \int_0^\infty R(t)\,dt$$

$$E\{T_s\} = \int_0^\infty R_s(t)\,dt = \int_0^\infty \left(e^{-\lambda t}+e^{-2\lambda t}-2e^{-4\lambda t}+e^{-5\lambda t}\right)dt =$$

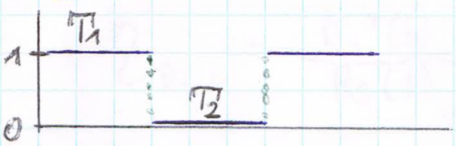
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt + \int_0^\infty e^{-2\lambda t}dt - \int_0^\infty 2e^{-4\lambda t}dt + \int_0^\infty e^{-5\lambda t}dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2\lambda}-\frac{2}{4\lambda}+\frac{1}{5\lambda} = \frac{1}{\lambda}\cdot\left(1+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{\lambda}$$

$$\int_0^\infty e^{-at}dt = \left[-\frac{e^{-at}}{a}\right]_0^\infty = -\frac{0}{a}-\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$$

Zad 3

Struktura funkcji niezawodnościowych jest taka sama elementy 3 4 5 są elementami odnawialnymi



$F_i(t) = 1-e^{-at}$ elementy odnawialne

$G_i(t) = 1-e^{-bt}$ - czas odnowy

$D_i(t) = 1-e^{-\lambda t}$ elementy nieodnawialne

$k_{g_i}(t) = P\{X(t)=1\}$	$R(t)$	szeregowo
$1-k_g(t) = P\{X(t)=0\}$	$F(t)$	równolegle
elementy odnawialne	nieodnawialne ∞	

$k_g(t) \to$ współczynnik gotowości $\to$ prawdopodobieństwo poprawnej pracy obiektu w chwili t

$k_{g_S}(t) = ?$

$1-k_{g_S}(t) = (1-k_{g_5}(t))(1-k_{g_I}(t))$

$k_{g_I}(t) = k_{g_4}(t)\cdot k_{g_{II}}(t)$

$1-k_{g_{II}}(t) = (1-k_{g_3}(t))$ $F_{III}(t)$

$R_{III}(t) = R_{T1}(t)\cdot R_2(t)$

$$k_{g_i}(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1-f^*(s)}{1-f^*(s)g^*(s)}$$

$Kg_i(t) = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} \cdot e^{-(a+b)t}$ jak to obliczone → wydruk na końcu

Obliczanie granicznego współczynnika niezawodności:

$t \to \infty$ gdy czas zostanie przesunięty do nieskończoności, elementy nieodnawialne będą popsute, w systemie będą wtedy tylko elementy odnawialne

Kg_i → graniczny współczynnik gotowości

Θ → wartość oczekiwana

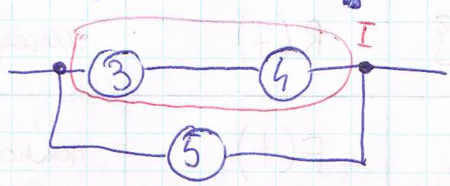
$$Kg_i = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2} = \qquad \Theta_1 = \frac{1}{a} \qquad \Theta_2 = \frac{1}{b}$$

$$Kg_i = \frac{b}{b+a}$$

$$Kg_i = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{b}{a+b}$$

Kg_s → graniczny współczynnik gotowości całego systemu

w $t \to \infty$ system wygląda tak:



$$1 - Kg_s(t) = (1 - Kg_5(t))(1 - Kg_I(t))$$

$$Kg_I(t) = Kg_3(t) \cdot Kg_4(t)$$

$$Kg_I(t) = \left(\frac{b}{a+b}\right)\left(\frac{b}{a+b}\right) = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2$$

$$1 - Kg_s(t) = \left(1 - \frac{b}{a+b}\right)\left(1 - \left(\frac{b}{a+b}\right)^2\right)$$

$$Kg_s(t) = 1 - \left[1 - \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 - \frac{b}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^3\right] = \cancel{1} - \cancel{1} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 + \frac{b}{a+b} - \left(\frac{b}{a+b}\right)^3 =$$

$$Kg_s(t) = \frac{b}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 - \left(\frac{b}{a+b}\right)^3$$

Redundancja → jest to nadmiarowość układowa

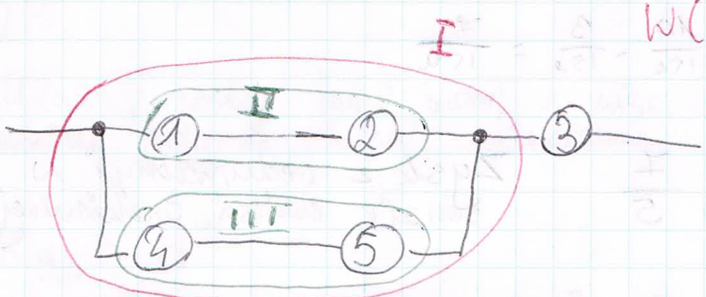
wskaźnik niezawodności:

$$\eta_{W(t)} = \frac{W^*(t)}{W(t)}$$

$W(t)$ → rozważany wskaźnik niezawodności

$W^*(t)$ → wartość niezawodności z elementami nadmiarowymi

$W(t)$ → bez elementów nadmiarowych



System złożony jest z takich samych elementów nieodnawialnych

$$F_i(t) = F(t) = 1 - e^{-at}$$

Wyznaczyć zysk z redundancji dla wskaźników: $R(t)$, $E\{T\}$

$$\eta_{R(t)} = \frac{R_S^*(t)}{R_S(t)} \qquad \eta_{E\{T\}} = \frac{E_S^*\{T\}}{E_S\{T\}}$$

1°

$$R_S(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot R_3(t)$$

$$R_S(t) = e^{-at} \cdot e^{-at} \cdot e^{-at} = e^{-3at}$$

$$R_S^*(t) = R_3(t) \cdot R_I(t)$$

$$F_I(t) = F_{II}(t) \cdot F_{III}(t)$$

$$R_{II}(t) = R_1(t) \cdot R_2(t)$$

$$R_{III}(t) = R_4(t) \cdot R_5(t)$$

$$R_{III}(t) = e^{-at} \cdot e^{-at} = e^{-2at} = R_{II}(t)$$

$$F_I(t) = (1 - e^{-2at}) \cdot (1 - e^{-2at}) = 1 - e^{-2at} - e^{-2at} + e^{-4at} = 1 - 2e^{-2at} + e^{-4at}$$

$$R_S^*(t) = e^{-at} \cdot (\cancel{1} - \cancel{1} + 2e^{-2at} - e^{-4at}) = 2e^{-3at} - e^{-5at}$$

$$\eta_{R(t)} = \frac{R_S^*(t)}{R_S(t)} = \frac{2e^{-3at} - e^{-5at}}{e^{-3at}} = 2 - e^{-2at}$$

$$\eta_{R(t)}(0) = 2 - 1 = 1$$ // sprawdzenie czy dobrze obliczone

$$\eta_{R(t)}(\infty) = 2 - e^{-\infty} = 2$$

2^o $\boxed{E\{T\} = \int_0^\infty R(t)\,dt}$

$$E_S\{T\} = \int_0^\infty e^{-3at}dt = \left[\frac{1}{-3a}\cdot e^{-3at}\right]_0^\infty = \cancel{-\frac{1}{3a}\cdot 0} - \left(-\frac{1}{3a}\cdot 1\right) = \frac{1}{3a}$$

$$E_S^*\{T\} = \int_0^\infty 2e^{-3at} - \int_0^\infty e^{-5at} = 2\cdot\left[\frac{1}{-3a}e^{-3at}\right]_0^\infty - \left[-\frac{1}{5a}\cdot e^{-5at}\right]_0^\infty =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{3a} - \frac{1}{5a} = \frac{2}{3a} - \frac{1}{5a} = \frac{10}{15a} - \frac{3}{15a} = \frac{7}{15a}$$

$$\eta_{E\{T\}} = \frac{\frac{7}{15a}}{\frac{1}{3a}} = \frac{7}{15a}\cdot\frac{3a}{1} = \frac{7}{5}$$ Zysk z redundancji w sensie wartości oczekiwanej

ile razy wydłuży się czas do uszkodzenia

Zad 2|

Wszystkie elementy są odnawialne i identyczne

$$F_i(t) = F(t) = 1 - e^{-at}$$

$$G_i(t) = G(t) = 1 - e^{-bt}$$ czas odnowy

Należy obliczyć zysk z redundancji dla wskaźników:

$kg(t)$ oraz Kg

$$\eta_{kg(t)} = \frac{kg_S^*(t)}{kg_S(t)}$$

$$Kg_i(t) = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}\cdot e^{-(a+b)t} = d(t)$$

1^o $kg_S(t) = kg_1(t)\cdot kg_2(t)\cdot kg_3(t) = (d(t))^3$

$$kg_S(t) = kg_3(t)\cdot kg_I(t)$$
$$1 - kg_I(t) = (1 - kg_{II}(t))(1 - kg_{III}(t))$$
$$kg_{II}(t) = kg_{III}(t) = kg_1(t)\cdot kg_2(t)$$

$$kg_{II}(t) = kg_{III}(t) = [d(t)]^2$$
$$1 - Kg_I(t) = (1 - [d(t)]^2)(1 - kg[d(t)]^2) = 1 - 2[d(t)]^2 + [d(t)]^4$$
$$kg_S(t) = d(t)\cdot(\cancel{1} - \cancel{1} + 2[d(t)]^2 - [d(t)]^4) = 2[d(t)]^3 - [d(t)]^5$$
$$\eta_{kg(t)} = \frac{2[d(t)]^3 - [d(t)]^5}{[d(t)]^3} = 2 - [d(t)]^2 = 2 - \left[\frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}\cdot e^{-(a+b)t}\right]^2$$

$\eta_{kg(t)}(0) = 2-\left[\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}\cdot 1\right]^2 = 2-\left[\frac{a+b}{a+b}\right]^2 = 2-1=1$ // spełnione

$$\eta_{kg(t)}(\infty) = 2-\left[\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}\cdot 0\right]^2 = 2-\left[\frac{b}{a+b}\right]^2$$

2°

Układ pozostaje taki sam, a więc możemy jedynie zmienić ustawienie

$$K_{g_i} = \frac{b}{a+b} = d$$

$$K_{g_s} = d^3$$

$$K_{g_s}^* = K_{g_I}\cdot K_{g_{II}} = 2d^3-d^5$$

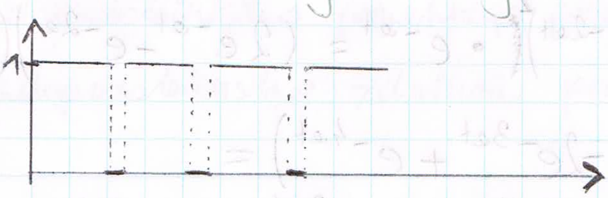
$$1-K_{g_I} = (1-K_{g_{II}})(1-K_{g_{III}}) = 1-2d^2+d^4$$

$$K_{g_{II}} = d^2 = K_{g_{III}}$$

$$\eta K_g = \frac{2d^3-d^5}{d^3} = 2-d^2 = 2-\left[\frac{b}{a+b}\right]^2$$

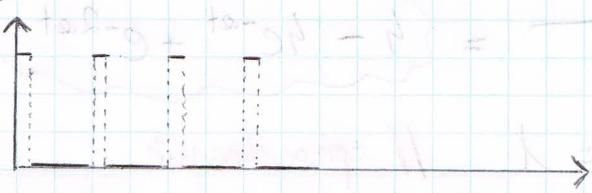
$\eta_{Kg(t)}(t) = 2-\left[\frac{b}{a+b}\right]^2$ możemy rozpatrzeć 2 przypadki

1° gdy $b \gg a$ wtedy elementy odnawiają się bardzo szybko



$$\eta_{Kg(t)}(t) = 2-1 = 1$$

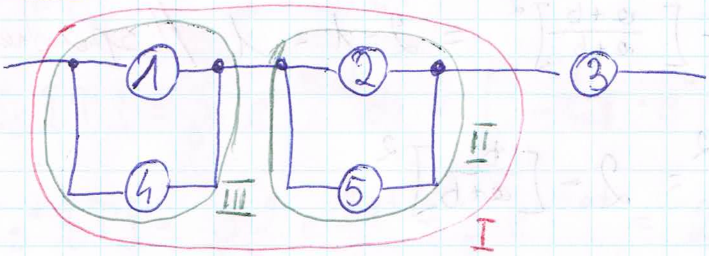
gdy $a \gg b$



$$\eta_{Kg(t)}(t) = 2-0 = 2$$

A więc możemy wywnioskować, że zysk z redundancji jest większy, gdy elementy są gorsze (szybciej się psują)

Zad 3



elementy są nieodnawialne

$F_1(t) = F(t) = 1 - e^{-at}$

Wyznaczyć zysk z redundancji dla wskaźników $R(t)$ i $E\{T\}$

1°

$$\eta_{R_S(t)} = \frac{R_S^*(t)}{R_S(t)}$$

$$R_S(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot R_3(t)$$

$$R_S(t) = e^{-at} \cdot e^{-at} \cdot e^{-at} = e^{-3at}$$

$$R_S^*(t) = R_3(t) \cdot R_{II}(t) \cdot R_{III}(t)$$

$$F_{II}(t) = F_1(t) \cdot F_4(t)$$

$$F_{III}(t) = F_2(t) \cdot F_5(t)$$

$$F_{III}(t) = (1-e^{-at})(1-e^{-at}) = 1 - e^{-at} - e^{-at} + e^{-2at} = 1 - 2e^{-at} + e^{-2at} = F_{II}$$

$$R_S^{*\prime}(t) = (\cancel{1} - \cancel{1} + 2e^{-at} - e^{-2at})^2 \cdot e^{-at} = (2e^{-at} - e^{-2at})(2e^{-at} - e^{-2at})\, e^{-at} =$$

$$= e^{-at}(4e^{-2at} - 2e^{-3at} - 2e^{-3at} + e^{-4at}) =$$

$$= e^{-at}(4e^{-2at} - 4e^{-3at} + e^{-4at}) = 4e^{-3at} - 4e^{-4at} + e^{-5at}$$

$$\eta_{R_S(t)} = \frac{4e^{-3at} - 4e^{-4at} + e^{-5at}}{e^{-3at}} = 4 - 4e^{-at} + e^{-2at}$$

$$\eta_{R_S(t)}(0) = 4 - 4 + 1 = 1$$ // sprawdzenie

$$\eta_{R_S(t)}(\infty) = 4 - 0 + 0 = 4$$

2°

$$E\{T\} = \int_0^\infty R(t)\, dt$$

ZSK

$$\eta_{E\{T\}} = \frac{E_s^*\{T\}}{E_s\{T\}}$$

$$E_s\{T\} = \int_0^\infty e^{-3at}\,dt = \left[\frac{1}{-3a}\cdot e^{-3at}\right]_0^\infty = -\frac{1}{3a}\cdot 0 - \left(-\frac{1}{3a}\cdot 1\right) = \frac{1}{3a}$$

$$\cancel{E_s^*\{T\} = \int_0^\infty 4 - 4\cdot\int_0^\infty e^{-at} + \int_0^\infty e^{-2at} = 4 - 4\cdot\left[\frac{1}{-a}\cdot e^{-at}\right] + \left[\frac{1}{-2a}\cdot e^{-2at}\right] =}$$

$$\cancel{= 4 - \frac{4}{a} + \frac{1}{2a} = \frac{8a}{2a} - \frac{8}{2a} + \frac{1}{}}$$

$$E_s^*\{T\} = 4\int_0^\infty e^{-3at}\,dt - 4\int_0^\infty e^{-4at}\,dt + \int_0^\infty e^{-5at}\,dt =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{3a} - 4\cdot\frac{1}{4a} + \frac{1}{5a} = \frac{20}{15a} - \frac{15}{15a} + \frac{3}{15a} = \frac{8}{15a}$$

$$\eta_{E_s\{T\}} = \frac{8}{15a}\cdot\frac{3a}{1} = \frac{8}{5}$$

ĆW 3

Redundancje aktywne → gdy element rezerwowy jest włączony dopiero wtedy, gdy się popsuje element podstawowy

Charakterystyki przełącznika:

- τ_p → czas przełączenia
- P_p → prawdopodobieństwo poprawnego przełączenia
- R_p → prawdopodobieństwo zdatności przełącznika w chwili t

Idealny:

$\tau_p = 0$

$R_p(t) = 1$

$P_p = 1$

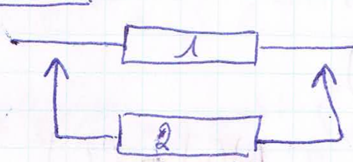
Rzeczywisty:

$\tau_p \geq 0$

$R_p(t) \leq 1$

$P_p \leq 1$

Zad 1



Jest to przełącznik idealny, nieodnawialny obie elementy są identyczne

$F_i(t) = F(1) = 1 - e^{-at}$

$\tau_p = 0 \quad P_p = 1 \quad R_p(t) = 1$

Obliczyć $\eta_{R(t)}$ i $\eta_{E\{T\}}$

$1^o \quad R_S(t) = e^{-at}$

$$\eta_{W(t)} = \frac{W^*(t)}{W(t)}$$

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t)$$

gęstość zmiennej losowej

$T_S^* = T_1 + T_2$

$R_S^*(t) = P\{T_S^* > t\} =$

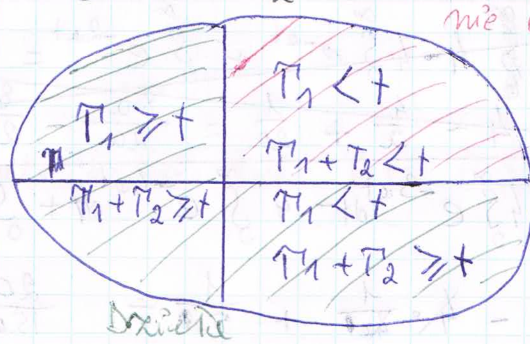
$= P\{T_1 + T_2 \geq t\} =$

$P\{T_1 \geq t\} + P\{T_1 < t,\ T_1 + T_2 \geq t\} =$

pierwszy działa

pierwszy nie działa ale drugi działa

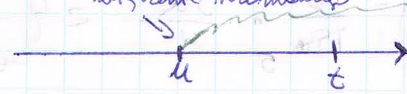
nie działa



$$R_S^*(t) = R_1(t) + \int_0^t R_2(t-u)\, dF_1(u) =$$

$$= R_1(t) + \int_0^t R_2(t-u) f_1(u)\, d(u) =$$

włączenie rezerwowego



~~$= e^{-at} + \int_0^\infty e^{-a(t-u)} \cdot e^{-au} du = e^{-at}$~~

$$f(t) = [F(t)]' = [1 - e^{-at}]' = ae^{-at}$$

$$= e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-u)} \cdot (ae^{-au})\, du = e^{-at} + a\int_0^\infty e^{-at+au-au} du =$$

$$= e^{-at} + a\int_0^t e^{-at} du = e^{-at} + ae^{-at}\int_0^t du = e^{-at} + ae^{-at}[u]_0^t =$$

$$e^{-at} + ae^{-at} \cdot t - ae^{-at} \cdot 0 = e^{-at} + ate^{-at} = e^{-at}(1+at)$$

$R_S^*(0) = e^0 \cdot (1+0) = 1$ // czyli dobrze

$$\eta_{R(t)}(t) = \frac{e^{-at}(1+at)}{e^{-at}} = 1 + at$$

$\eta_{R(t)}(0) = 1 + 0 = 1$

$\eta_{R(t)}(\infty) = \infty$

$R_S^*(t) = e^{-at}(1+at)$

$$E\{T_S\} = \int_0^\infty e^{-at} \cdot t\, dt = \left[\frac{1}{-a} \cdot e^{-at}\right]_0^\infty = 0 - \frac{1}{-a} = \frac{1}{a}$$

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \qquad h'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b h'(x) g(x)\, dx = [h(x) g(x)]_a^b - \int_a^b h(x) g'(x)\, dx$$

$h'(x) = (-ae^{-at}) \qquad h(x) = e^{-at} \qquad g(t) = t$

Zad 1 | ⑥

$$E_S^*\{T_S\} = \int_0^\infty e^{-at}(1+at)dt = \int_0^\infty e^{-at}dt + \int_0^\infty ate^{-at}dt =$$

Całkowanie przez części:

Całka w postaci $\int_a^b f(x)g(x)dx$

Jeśli potrafimy znaleźć takie $h(x)$, że $h'(x) = f(x)$ to możemy przekształcić

e^{-at} $\quad e^{-at}$ $\quad g(t) = t$

całkę do postaci: $\quad (e^{-at})' = (-ae^{-at})$

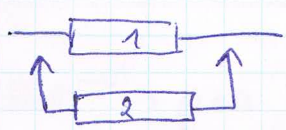
$$\int_a^b h'(x)g(x)dx = [h(x)g(x)]_a^b - \int_a^b h(x)g'(x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-at}(1+at)dt = \int_0^\infty e^{-at}dt + \int_0^\infty ate^{-at}dt = \left[\frac{1}{-a}\cdot e^{-at}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (ae^{-at})t\,dt =$$

$$= \frac{1}{a} - \left(\left[e^{-at}\cdot t\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-at}dt\right) = \frac{1}{a} - \left(\left[(0\cdot\infty)-(0\cdot t)\right] - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}+\frac{1}{a} = \frac{2}{a}$$

$$\eta_{E\{T\}} = \frac{\frac{2}{a}}{\frac{1}{a}} = \frac{2}{a}\cdot\frac{a}{1} = 2$$

Zad 2 |



elementy są nieodnawialne

$F_1(t) = 1 - e^{-at}$

$F_2(t) = 1 - e^{-bt}$

$\eta_{R(t)}, \quad \eta_{E\{T\}}$

$R_S(t) = e^{-at}$

$$R_S^*(t) = R_1(t) + \int_0^t R_2(t-u)f_1(u)du =$$

$$= e^{-at} + \int_0^t e^{-b(t-u)}\cdot(ae^{-au})du = e^{-at} + a\int_0^t e^{-bt+bu-au}du =$$

$$= e^{-at} + ae^{-bt}\int_0^t e^{u(b-a)}du = e^{-at} + ae^{-bt}\int_0^t e^{-u(a-b)}du =$$

$$= e^{-at} + ae^{-bt}\left[\frac{1}{b-a}\cdot e^{-u(a-b)}\right]_0^t = e^{-at} + ae^{-bt}\left[\frac{1}{b-a}\cdot e^{-(a-b)t} - \frac{1}{b-a}\right]$$

$$= e^{-at} + \frac{a}{b-a}\cdot e^{-(a-b)t-bt} - \frac{a}{b-a}e^{-bt} =$$

$$= e^{-at} + \frac{a}{b-a} \cdot e^{-at+bt-bt} - \frac{a}{b-a} e^{-bt} =$$

$$= e^{-at} + \frac{a}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

$R_S^*(0) = 1 + 0 = 1$ // czyli jest dobrze

$$\eta_{R(t)}(t) = \frac{e^{-at} + \frac{a}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)}{e^{-at}} = 1 + \frac{a}{b-a}\left(1 - e^{-bt+at}\right) =$$

$$= 1 + \frac{a}{b-a}\left(1 - e^{-(b-a)t}\right)$$

$$\eta_{R(t)}(0) = 1 + (1-1) = 1$$

$$\eta_{R(t)}(\infty) = 1 + \frac{a}{b-a}$$

2°

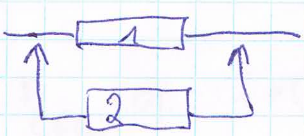
$$E\{T_S\} = \int_0^\infty e^{-at}\,dt = \left[\frac{1}{-a} \cdot e^{-at}\right]_0^\infty = 0 - \frac{1}{-a} = \frac{1}{a}$$

$$E^*\{T_S\} = \int_0^\infty e^{-at}\,dt + \frac{a}{b-a}\int_0^\infty e^{-at}\,dt - \frac{a}{b-a}\int_0^\infty e^{-bt}\,dt =$$

$$= \left[\frac{1}{-a} \cdot e^{-at}\right]_0^\infty + \frac{a}{b-a}\left[\frac{1}{-a} \cdot e^{-at}\right]_0^\infty - \frac{a}{b-a}\left[\frac{1}{-b} \cdot e^{-bt}\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{a}{b-a} \cdot \frac{1}{a} - \frac{a}{b-a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b-a} - \frac{a}{b(b-a)}$$

$$\eta_{E\{T\}} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b-a} - \frac{a}{b(b-a)}}{\frac{1}{a}} = 1 + \frac{a}{b-a} - \frac{a^2}{b(b-a)}$$



System z przełącznikiem rzeczywistym

$$F_p(t) = P\{T_p < t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F_1(t) = 1 - e^{-at}$$

$$F_2(t) = \begin{cases} 1 - e^{-bt} & t < u \\ 1 - e^{-at} & t \geq u \end{cases}$$

$T_p \rightarrow$ czas do uszkodzenia przełącznika

$$\tau_p = 0, \quad P_p = p_1, \quad F_p(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

ad 5k

$$\boxed{R_S(t) = e^{-at}}$$

kiedy 1 element działa

1 element nie działa

prawdopodobieństwo poprawnego przełączenia

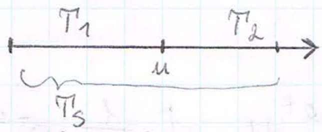
$$\boxed{R_S^*(t)} = P\{T_1 \geq t\} + P\{T_1 < t,\ T_p \geq u,\ p,\ T_1 + T_2 \geq t\} =$$

czas przełączenia $u = T_1$

drugi przełącznik działa

1 element działa

powod. przełączenie



$$= R_1(t) + \int_0^t R_2(u) \cdot R_p(u) \cdot p \cdot R_2(t-u)\, f_1(u)\, du =$$

w chwili u drugi przełącznik jest sprawny

prawdop. zdolności przełącznika w czasie u

drugi będzie działał w nowe t

1 jest popsuty w czasie u

$$= e^{-at} + \int_0^t e^{-bu} \cdot e^{-\lambda u} \cdot p \cdot e^{-c(t-u)} \cdot a \cdot e^{-au}\, du =$$

$$= e^{-at} + p \cdot a \int_0^t e^{-bu - \lambda u - ct + cu - au}\, du = \cancel{e^{-at} \cdot p \cdot a \cdot e^{-(\lambda+c)\cdot t} \cdot \int_0^t e^{-bu+cu-au}} =$$

$$\cancel{= e^{-at} \cdot pae^{-(\lambda+c)t} \cdot \int_0^t e^{-(b-c+a)u} = e^{-at} \cdot pae^{-(\lambda+c)t} \left[\frac{1}{-(b-c+a)} \cdot e^{-(b-c+a)u}\right]_0^t =}$$

$$\cancel{= e^{-at} \cdot pae^{-(\lambda+c)t} \cdot \left[\frac{1}{-(b-c+a)} \cdot e^{-(b-c+a)t} + \frac{1}{(b-c+a)}\right] =}$$

$$= e^{-at} + p \cdot a \int_0^t e^{-(b+\lambda-c+a)u}\, du \cdot e^{-ct} = e^{-at} + p \cdot a \cdot e^{-ct} \cdot \left[\frac{1}{-(b+\lambda-c+a)} \cdot e^{-(b+\lambda-c+a)u}\right]_0^t$$

$$= e^{-at} + p \cdot a \cdot e^{-ct} \cdot \left[\frac{1}{-(b+\lambda-c+a)} \cdot e^{-(b+\lambda-c+a)t} + \frac{1}{b+\lambda-c+a}\right] =$$

$$= e^{-at} + p \cdot a \cdot \frac{1}{-(b+\lambda-c+a)} \cdot \left[e^{-bt-\lambda t+\cancel{ct}-at-\cancel{ct}} - e^{-ct}\right] =$$

$$= e^{-at} - \frac{pa}{b+\lambda-c+a} \cdot \left[e^{-bt-at-\lambda t} - e^{-ct}\right] =$$

$$= \boxed{e^{-at} - \frac{pa}{b+\lambda-c+a} \cdot \left[e^{-t(b+a+\lambda)} - e^{-ct}\right]}$$

$$\Re_{R_S(t)} = \frac{e^{-at} - \frac{pa}{b+\lambda-c+a} \cdot \left[e^{-t(b+a+\lambda)} - e^{-ct}\right]}{e^{-at}} = 1 - \frac{pa}{b+\lambda-c+a} \cdot \left[e^{-t(b+a+\lambda-a)} - e^{-(c+a)t}\right]$$

$$= 1 - \frac{pa}{b+\lambda-c+a} \cdot \left[e^{-t(b+\lambda)} - e^{-(c+a)t}\right]$$

$$\eta_{R_S(t)}(0) = 1 - \frac{ap}{a+b+c+\lambda}\left[1-1\right] = 1$$ // czyli jest ok

$$R_s^*(0) = 1$$ // czyli też jest ok

2°
$$E\{T_s\} = \int_0^\infty e^{-at}\,dt = \left[-\frac{1}{a}\cdot e^{-at}\right]_0^\infty = \frac{1}{a}$$

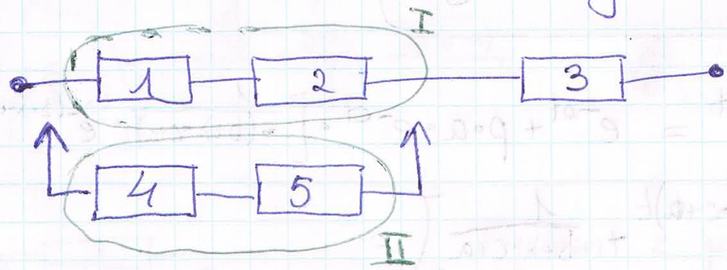
$$E^*\{T_s\} = \int_0^\infty e^{-at}\,dt - \frac{pa}{b+\lambda-c+a}\cdot\left[\int_0^\infty e^{-t(a+b+\lambda)} - \int_0^\infty e^{-ct}\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{-a}\cdot e^{-at}\right]_0^\infty - \frac{pa}{b+\lambda-c+a}\cdot\left[\left[\frac{1}{-(a+b+\lambda)}\cdot e^{-t(a+b+\lambda)}\right]_0^\infty - \left[\frac{1}{-c}\cdot e^{-ct}\right]_0^\infty\right] =$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{pa}{a+b+\lambda-c}\cdot\left[\frac{1}{a+b+\lambda} - \frac{1}{c}\right] =$$

$$\eta_{E\{T_s\}} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{pa}{a+b+\lambda-c}\cdot\left[\frac{1}{a+b+\lambda} - \frac{1}{c}\right]}{\frac{1}{a}} = 1 - \frac{pa^2}{a+b+\lambda-c}\cdot\left[\frac{1}{a+b+\lambda} - \frac{1}{c}\right]$$

Zad| System składa się z elementów stanowiących podstawowe elementy oraz 2 elementów stanowiących rezerwę aktywną



Elementy 4 i 5 są rezerwą dla elementów 1 i 2. Wszystkie elementy są nieodnawialne o czasie do uszkodzenia wykładniczym z parametrem a. Obliczyć zysk z redundancji dla wskaźników: prawdopodobieństwa poprawnej pracy systemu w chwili t oraz oczekiwanego czasu do uszkodzenia.

$$F_i = 1 - e^{-at}$$

$\eta_{R(t)} = ?$ $\eta_{E\{T_s\}} = ?$

1°

$$R_S(t) = F_1(t)\cdot F_2(t)\cdot F_3(t) = e^{-3at}$$

$$R_I(t) = F_1(t)\cdot F_2(t) = e^{-2at}$$

$$R_{II}(t) = F_4(t)\cdot F_5(t) = e^{-2at}$$

podsystem I działa — element 3 działa — lub

$$R_S^*(t) = P\{T_S^* > t\} = P\{T_I + T_{II} \geq t,\ T_3 \geq t\} +$$

$$P\{T_I < t,\ T_I + T_{II} \geq t,\ T_3 \geq t\} =$$

podsystem pierwszy nie działa — podsystem drugi działa — element trzeci działa

$$= R_S^*(t) = R_I(t)\cdot R_3(t) + \int_0^t R_{II}(t-u)\, dF_I(u)\cdot R_3(t) =$$

$$= e^{-2at}\cdot e^{-at} + \int_0^t e^{-2a(t-u)}\cdot(2a\cdot e^{-2au})\, e^{-at}\, du =$$

$$= e^{-3at} + \int_0^t e^{-2at+\cancel{2au}}\cdot 2a e^{\cancel{-2au}}\cdot e^{-at}\, du =$$

$$= e^{-3at} + 2ae^{-3at}\cdot\int_0^t du = e^{-3at} + 2ae^{-3at}\cdot t = e^{-3at}(1+2at)$$

$$\boxed{\eta_{R(t)} = \frac{\cancel{e^{-3at}}(1+2at)}{\cancel{e^{-3at}}} = 1+2at}$$

$$R_S^*(0) = 1\cdot(1+0) = 1$$

$$\eta_{R(t)}(0) = 1+0 = 1$$

2°

$$\cancel{E\{T_S\} = \int_0^\infty e^{-3}}$$

$$\cancel{E^*\{T_S\} = \int_0^\infty e^{-3at}}$$

$$\cancel{= (1+2at)\cdot\frac{1}{3a}}$$

$$E^*\{T_S\} = \int_0^\infty e^{-3at}\, dt + \int_0^\infty 2at\, e^{-3at}\, dt =$$

$$\frac{1}{3a} + \frac{2}{3}\cdot\int_0^\infty(-3ae^{-3at})\cdot t\cdot dt = \{\text{całkowanie przez części}\}$$

$$= \frac{1}{3a} + \frac{2}{3}\cdot\left(\left[e^{-3at}\cdot t\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-3at}\, dt\right) =$$

$$= \frac{1}{3a} + \frac{2}{3}\cdot\left(0 - \frac{1}{3a}\right) = \frac{1}{3a} + \frac{2}{9a} = \frac{3}{9a} + \frac{2}{9a} = \frac{5}{9a}$$

$$E\{T_S\} = \int_0^\infty e^{-3at}\, dt = \frac{1}{3a}$$

$$\eta_{E\{T\}} = \frac{5}{\cancel{9a}\,3}\cdot\frac{3a}{1} = \frac{5}{3}$$

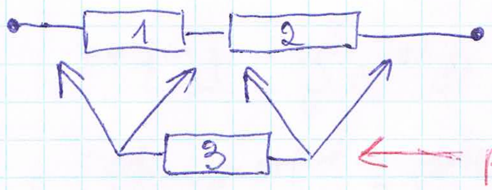
NSK | ćw 4

Model systemu wielostanowego

Dowolny stan systemu opisany jest stanami jego elementów, czyli wektorem

$$X = \langle x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n \rangle$$

Zad 1



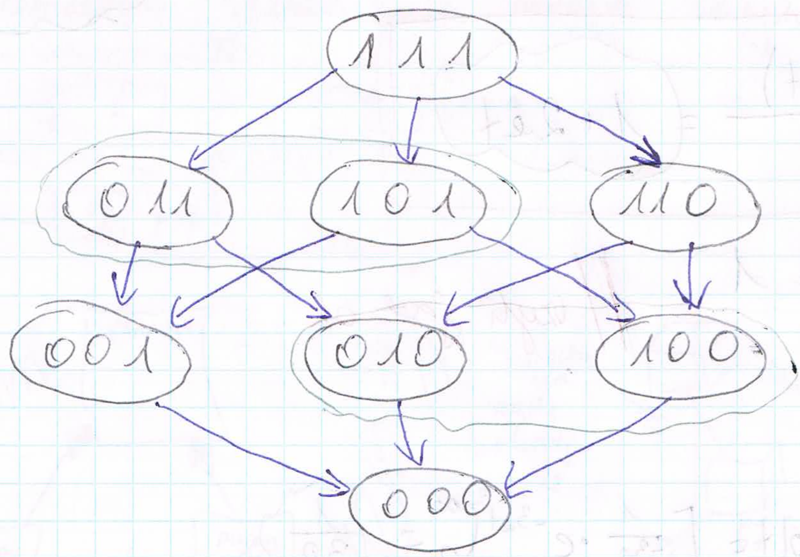
pasywna redundancja, przesuwająca się

• wszystkie elementy są identyczne i odnawialne z redundancją przesuwającą się

$$F_i(t) = F(t) = 1 - e^{-at}$$
$$G_i(t) = G(t) = 1 - e^{-bt}$$

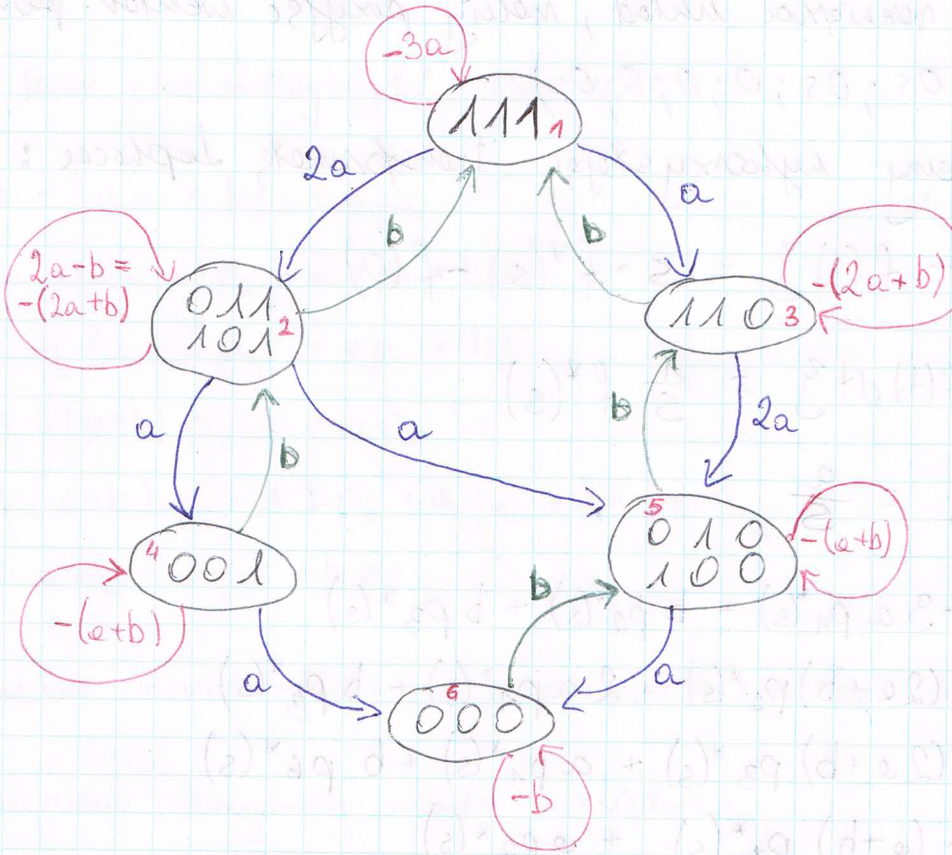
Zakładamy, że w systemie jest jeden konserwator, najpierw naprawiany jest element podstawowy a potem dodatkowy

1° Opis systemu : Graf stanów



Grupowanie stanów

2°:



z jaką intensywnością chce zostać w tym stanie – czyli minus sumę intensywności wychodzących niezależnie

Najpierw są naprawiane elementy podstawowe z intensywnością b

3° Układamy teraz układ równań różniczkowych stanu (Kołmogorowa):

(Prawdopodobieństwo z jakim system jest w tym stanie, czyli sumę wszystkiego co wchodzi do tego stanu.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} p_1(t) = -3a\, p_1(t) + b\, p_2(t) + b\, p_3(t) \\ \frac{d}{dt} p_2(t) = -(2a+b)\, p_2(t) + 2a\, p_1(t) + b\, p_4(t) \\ \frac{d}{dt} p_3(t) = -(2a+b)\, p_3(t) + a\, p_1(t) + b\, p_5(t) \\ \frac{d}{dt} p_4(t) = -(a+b)\, p_4(t) + a\, p_2(t) \\ \cancel{\frac{d}{dt} p_5(t) = -(a+b)\, p_5(t) + 2a\, p_3(t) + b\, p_6(t) + a\, p_2(t)} \quad \leftarrow \text{to usuwamy (bo najdłuższe)} \\ \frac{d}{dt} p_6(t) = -b\, p_6(t) + a\, p_5(t) + a\, p_4(t) \end{cases}$$

Układ równań nie ma rozwiązania, więc konieczne jest wprowadzenie równania normalizującego => suma wektora musi być równa 1 i usuwamy jedno z równań

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) + p_5(t) + p_6(t) = 1$$

Żeby można było rozwiązać układ, należy przyjąć wektor początk...
np.: $p(0) = (0{,}5; 0{,}5; 0; 0; 0; 0;)$

Układ rozwiązujemy wykorzystując transformatę Laplace'a:

$$L\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = s \cdot f^*(s) - f(0)$$

$$L\left\{\int f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s} f^*(s)$$

$$L\{a\} = \frac{a}{s}$$

$$\begin{cases} s \cdot p_1^*(s) - 0{,}5 = -3a\, p_1^*(s) + b\, p_2^*(s) + b\, p_3^*(s) \\ s\, p_2^*(s) - 0{,}5 = -(2a+b)\, p_2^*(s) + 2a\, p_1^*(s) + b\, p_4^*(s) \\ s\, p_3^*(s) - 0 = -(2a+b)\, p_3^*(s) + a\, p_1^*(s) + b\, p_6^*(s) \\ s\, p_4^*(s) - 0 = -(a+b)\, p_4^*(s) + a\, p_2^*(s) \\ \frac{1}{s} = p_1^*(s) + p_2^*(s) + p_3^*(s) + p_4^*(s) + p_5^*(s) + p_6^*(s) \\ s\, p_6^*(s) - 0 = a\, p_4^*(s) + a\, p_5^*(s) - b\, p_6^*(s) \end{cases}$$

Układ równań trzeba rozwiązać, potem zastosować transformatę odwrotną Laplace'a L^{-1} i uzyskamy wektor:

$$p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t), p_5(t), p_6(t))$$

z takim prawdopodobieństwem system będzie w stanie 1

Obliczamy współczynniki gotowości, zysku z redundancji

$$\eta_{Kg(t)} = \frac{Kg^*(t)}{Kg(t)} = \frac{p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)}{Kg_1(t) \cdot Kg_2(t)}$$

stany w których system jest sprawny

szeregowo, więc mnożenie

Liczymy teraz prawdopodobieństwo graniczne

$$p_i = \lim_{t \to \infty} p_i(t)$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{d}{dt} p_i(t) = \frac{d}{dt} \lim_{t \to \infty} p_i(t) = \frac{d}{dt} p_i = 0$$

Otrzymamy teraz charakterystyki graniczne:

$$0 = -3a p_1 + b p_2 + b p_3$$
$$0 = -(2a+b) p_2 + 2a p_1 + b p_4$$
$$0 = -(2a+b) p_3 + a p_1 + b p_5$$
$$0 = -(a+b) p_4 + a p_2$$
$$0 = -(a+b) p_5 + b p_6 + a p_2 + 2a p_3$$
$$0 = a p_4 + a p_5 - b p_6$$

i równanie normalizujące: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

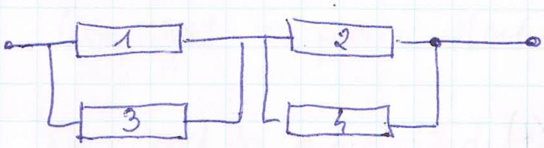
Po rozwiązaniu otrzymamy wektor rozwiązań:

$$p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$$

Po obliczeniu możemy obliczyć zysk podstawiając do wzoru:

$$Z_{Kg} = \frac{Kg^*}{Kg} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{Kg_1 \cdot Kg_2}$$

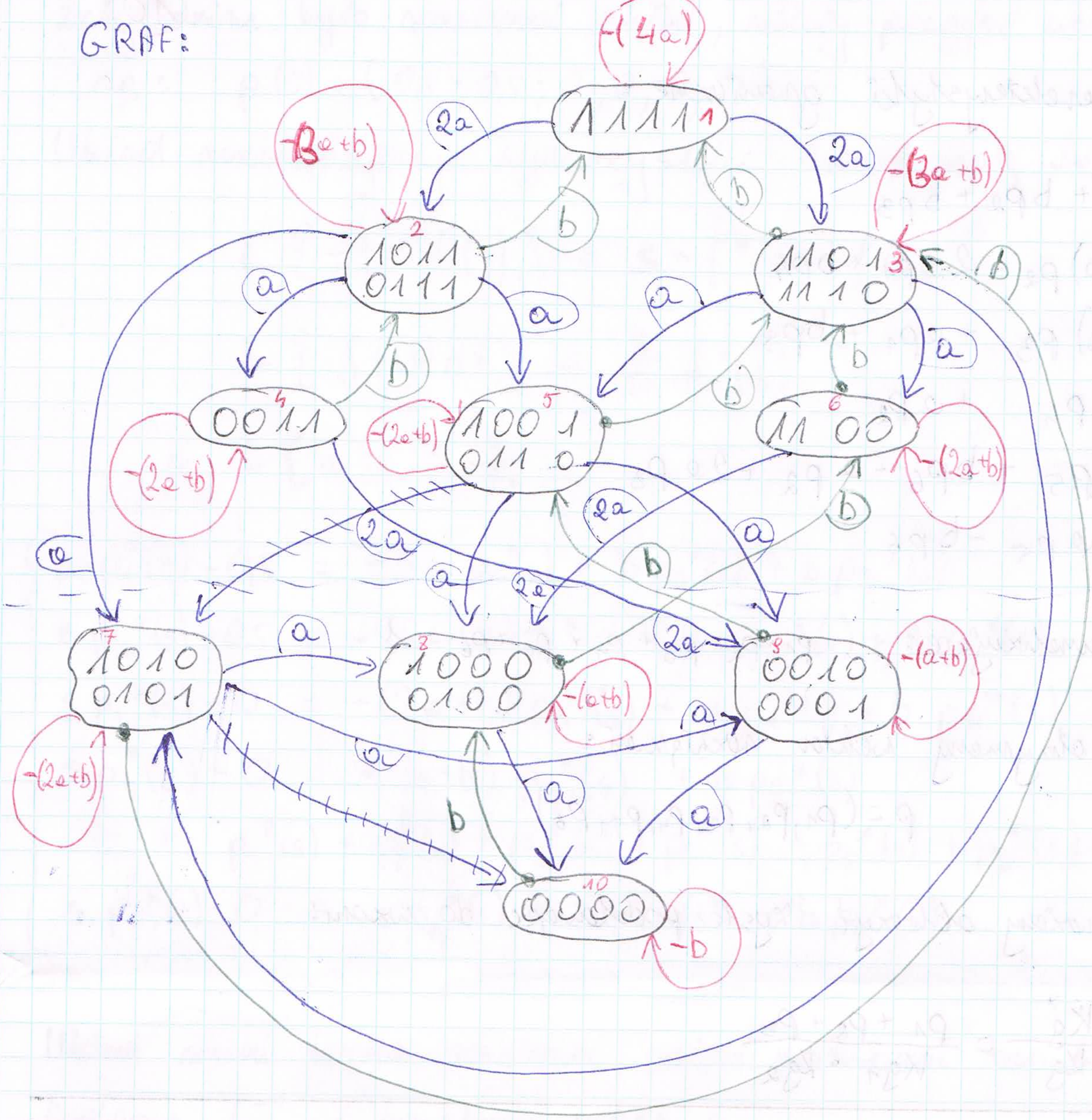
Zad 2



W systemie jest jeden konserwator, elementy psują się niezależnie 3 i 4 to nadmiar dla 1 i 2

$$F_i(t) = F(t) = 1 - e^{-at}$$
$$G_i(t) = G(t) = 1 - e^{-bt}$$

GRAF:



można napisać teraz równanie kołmogorowa:

$$\frac{d}{dt} p_1(t) = -4a\, p_1(t) + b\, p_2(t) + b\, p_3(t)$$

$$\frac{d}{dt} p_2(t) = -(3a+b) p_2(t) + 2a\, p_1(t) + b\, p_4(t)$$

$$\frac{d}{dt} p_3(t) = -(3a+b) p_3(t) + b \cdot p_7(t) + b \cdot p_6(t) \cdot 2a \cdot p_1(t) + b \cdot p_5$$

$$\frac{d}{dt} p_4(t) =$$

$$\frac{d}{dt} p_5(t) = \quad \text{itd} \ldots$$

$$\frac{d}{dt} p_6(t) =$$

$$\frac{d}{dt} p_7(t) =$$

$$\frac{d}{dt} p_8(t) =$$

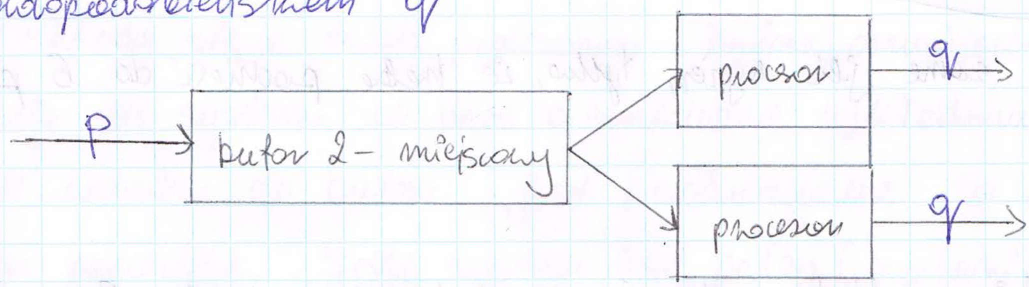
$$\frac{d}{dt} p_9(t) =$$

$$\frac{d}{dt} p_{10}(t) =$$

SK | ĆW 5 | 11

Zad 1

System składa się z dwóch procesorów i bufora dwumiejscowego. Zadania napływają do systemu pojedynczo, co stały odcinek czasu dt z prawdopodobieństwem p. Zadanie wchodzi do bufora i jest przekazywane do dowolnego wolnego procesora. Jeśli system jest pełen (zadania są w obu procesorach i dwa w buforze) to zadanie jest tracone.
Dowolny procesor kończy realizację zadania w kolejnym odcinku dt z prawdopodobieństwem q



a) Zdefiniować proces funkcjonowania systemu

$x(t)$ jest elementem $\{0,1,2,3,4\}$

$X = \{0,1,2,3,4\}$ → liczba zadań w systemie

b) Zdefiniować charakterystyki tego procesu

Czy jest to proces Markowa? → TAK – prawdopodobieństwo zdarzenia zależy jedynie od wyniku poprzedniego

Czy jest to proces jednorodny? → przejście ze stanu i do j nie zależy od tego, kiedy to przejście następuje

c) Wyznaczyć macierz prawdopodobieństw przejść P i rozkład początkowy p(0)

	0	1	2
0	1-p	p	0
4	0	0	

P =

	0	1	2	3	4
0	p*0+(1-p)	p	0	0	0
1	(1-p)*q	p*q+(1-p)*(1-q)	p*(1-q)	0	0
2	q^2*(1-p)	p*q^2+(1-p)[q*(1-q)+(1-q)*q]	(1-p)(1-q)^2+p*[q*(1-q)+(1-q)*q]	p*(1-q)^2	0
3	0	(1-p)*q^2	(1-p)[q*(1-q)+(1-q)*q]+p*q^2	(1-p)*(1-q)^2+p*[q*(1-q)+(1-q)q]	p*(1-q)^2
4	0	0	(1-p)q^2	(1-p)[q*(1-q)+(1-q)*q]+p*q^2	(1-p)(1-q)^2+p*[q*(1-q)+(1-q)*q]+p*(1-q)^2

$p(0) = (0.5, 0.5, 0, 0, 0)$

d) Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w kroku 4 w systemie są dwa zadania:

Należy macierz P podnieść do 4 potęgi i przemnożyć przez wektor $P^{(0)}$, otrzymamy wtedy wektor P(4)

$P(4) = P(0) \cdot P^4$ $\qquad P(4) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

Wynik = $a_4 + a_5$ (czyli [redacted] 3 i 4 zadanie w systemie)

e) wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w kroku 6 w systemie nie ma zadań

Obliczenie takie same jak wyżej, tylko, że trzeba podnieść do 6 potęgi

Wynik = a_1

f) Obliczyć oczekiwaną liczbę zadań w systemie w kroku 8

Wartość oczekiwaną możemy obliczyć z definicji.
Najpierw musimy obliczyć wektor p(8) [tak jak w punkcie d)] a następnie obliczyć:

$$EX = \{0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 2 \cdot a_3 + 3 \cdot a_4 + 4 \cdot a_5\}$$

g) Wyznaczyć graniczne prawdopodobieństwo tego, że w systemie jest jedno zadanie

Należy obliczyć rozkład graniczny korzystając z układu

1. Dopasowujemy do układu równań $(P^T - I)^{-1}\pi = 0$

$(P^T - I)\pi = 0$

transformowana macierz P transponowana $\quad$ macierz jednostkowa

2° żeby rozwiązać wprowadzamy równanie związane: $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$ wartość jednego równania w macierzy. czyli zamieniamy ... wiersz $|1, 1, 1, 1| \cdot \pi_1 = 0$

3° - Wyznaczamy wyznacznik macierzy $(P^T - I)$ ~~...~~ żeby sprawdzić czy jest nieosobliwa (różny od 0)

4° odwracamy macierz i dopasowujemy do równania $\pi = (P^T - I)^{-1} \cdot b$

5° Po rozwiązaniu mamy otrzymany wektor $\pi = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$

6° rozwiązaniem będzie π_1

h) Wyznaczyć oczekiwaną graniczną liczbę zadań w systemie

– liczymy wartość oczekiwaną:

$$E\pi = \{0 \cdot \pi_0 + 1\pi_1 + 2 \cdot \pi_2 + 3 \cdot \pi_3 + 4 \cdot \pi_4\}$$

i) Średnią graniczną liczbę zadań w kolejce: $1 \cdot \pi_3 + 2 \cdot \pi_4$

Markowe DC

ĆW 6

Zad2

System składa się z dwóch procesorów i bufora dwumiejscowego. Zadania napływają do systemu co czas o rozkładzie wykładniczym z parametrem a. Zadanie wchodzi do bufora i jest przekazywane do dowolnego wolnego procesora. Jeśli system jest pełen (zadania są w obu procesorach i dwa w buforze) to zadanie jest tracone. Dowolny procesor wykonuje dowolne zadanie w czasie o rozkładzie wykładniczym z parametrem b.

a) Zdefiniować proces funkcjonowania systemu i zbadać jego własności

$E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

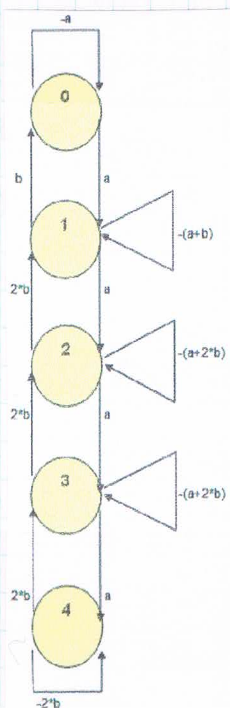
Jest to klasa procesu DC

Jest to proces Markowa, jest to proces jednorodny (intensywności nie zależą od czasu)

b) Wyznaczyć macierz intensywności przejść

$L =$

	0	1	2	3	4
0	-a	a	0	0	0
1	b	-(a+b)	a	0	0
2	0	2*b	-(a+2*b)	a	0
3	0	0	2*b	-(a+2*b)	a
4	0	0	0	2*b	-2*b



c) Wyznaczyć oczekiwaną liczbę zadań w systemie w chwili t c)

$p_0'(t)=-a*p_0(t)+b*p_1(t)$

$p_1'(t)=a*p_0(t)-(a+b)*p_1(t)+2*b*p_2(t)$

$p_2'(t)=a*p_1(t)-(a+2*b)*p_2(t)+2*b*p_3(t)$

~~$p_3'(t)=a*p_2(t)-(a+2*b)*p_3(t)+2*b*p_4(t)$~~

$p_4'(t)=a*p_3(t)-2*b*p_4(t)$

$p_0(t)+p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)+p_4(t)=1$

$p(0)=(0,5;\ 0,5;\ 0;\ 0;\ 0)$

$s*p_0(s)-0,5=-a*p_0(s)+b*p_1(s)$

$s*p_1(s)-0,5=a*p_0(s)-(a+b)*p_1(s)+2*b*p_2(s)$

$s*p_2(s)-0=a*p_1(s)-(a+2*b)*p_2(s)+2*b*p_3(s)$

$p_0(s)+p_1(s)+p_2(s)+p_3(s)+p_4(s)=1/s$

$s*p_4(s)-0=a*p_3(s)-2*b*p_4(s)$

$B(s)*p^T=b(s)$

zapisujemy w postaci macierzy

B(s)=

s+a	-b	0	0	0
-a	s+a+b	-2*b	0	0
0	-a	s+a+2*b	-2*b	0
1	1	1	1	1
0	0	0	-a	s+2*b

b(s)=

0,5
0,5
0
1/s
0

Wynik = $0*p_0(t)+1*p_1(t)+2*p_2(t)+3*p_3(t)+4*p_4(t)$

d) Wyznaczyć prawdopodobieństwo graniczne tego, że nadchodzące do systemu zadanie będzie obsłużo

Liczymy charakterystyki graniczne:

$0=-a*p_0+b*p_1$

$0=a*p_0-(a+b)*p_1+2*b*p_2$

$0=a*p_1-(a+2*b)*p_2+2*b*p_3$

~~$0=a*p_2-(a+2*b)*p_3+2*b*p_4$~~

$0=a*p_3-2*b*p_4$

$p_0+p1+p_2+p_3+p_4=1$

$B*p^T=c$ ==> $p^T=B^{-1}c$

B=

-a	b	0	0	0
a	-(a+b)	2*b	0	0
0	a	-(a+2*b)	2*b	0
1	1	1	1	1
0	0	0	a	-2*b

c=

0
0
0
1

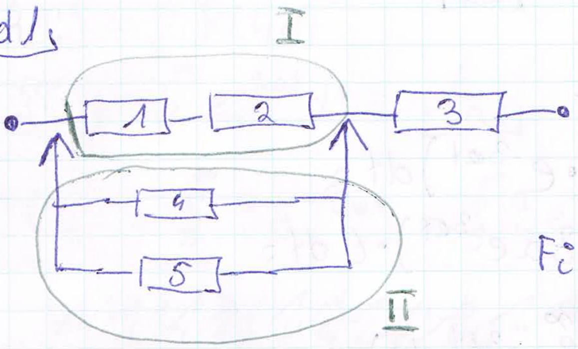
i obliczamy wektor p^T, który jest prawdopodobieństwem granicznym

a wynikiem będzie: $1-p_4$

5K,

Zad 1,

13



$F_i = 1 - e^{-at}$

$\eta_{R(t)} = ?$ $\eta_{E\{T_S\}} = ?$

1°

$\boxed{R_S(t) = R_1(t)\cdot R_2(t)\cdot R_3(t) = e^{-3at}}$

$\boxed{R_I(t) = R_1(t)\cdot R_2(t) = e^{-2at}}$

$F_{II}(t) = (1-e^{-at})\cdot(1-e^{-at}) = 1 - 2e^{-at} + e^{-2at}$

$\boxed{R_{II}(t) = 2e^{-at} - e^{-2at}}$

I podsystem działa — element 3 działa

$\boxed{R_S^*(t)} = P\{T_S^* > t\} = P\{T_I + T_{II} \geq t,\ T_3 \geq t\} + P\{T_I < t,\ T_I + T_{II} \geq t,\ T_3 \geq t\}$

podsystem I nie działa — podsystem II działa — element III działa

$= R_S^*(t) = R_I(t)\cdot R_3(t) + \int_0^t R_{II}(t-u)\, dF_I(u)\cdot R_3(t) =$

$= e^{-2at}\cdot e^{-at} + \int_0^t \left(2e^{-a(t-u)} - e^{-2a(t-u)}\right)\cdot\left(2a\cdot e^{-2au}\right)\cdot e^{-at}\, du =$

$= e^{-3at} + 2a\int_0^t \left(2e^{-at+au-2au-at} - e^{-2at+\cancel{2au}-\cancel{2au}-at}\right) du =$

$= e^{-3at} + 4a\int_0^t \left(e^{-2at-au}\right) du - 2ae^{-3at}\cdot\int_0^t du =$

$= e^{-3at} + 4ae^{-2at}\cdot\left[\frac{1}{-a}\cdot e^{-au}\right]_0^t - 2ae^{-3at}\left[u\right]_0^t =$

$= e^{-3at} + 4ae^{-2at}\cdot\left[\frac{1}{-a}\cdot e^{-at} + \frac{1}{a}\right] - 2ae^{-3at}\cdot t =$

$= \cancel{e^{-3at}} + 4e^{-2at} - \overset{3}{\cancel{4}}e^{-3at} - 2e^{-3at}\cdot ta = \boxed{4e^{-2at} - e^{-3at}(3+2ta)}$

$R_S^*(0) = 4\cdot 1 - 1\cdot(3+0) = 1$ // czyli jest ok

$\eta_{R_S(t)} = \frac{4e^{-2at} - e^{-3at}(3+2ta)}{e^{-3at}} = \boxed{4\cdot e^{at} - (3+2ta)}$

$\eta_{R_S(t)}(0) = 4 - 3 = 1$ //czyli jest ok

2° $E\{T_S\} = \int_0^\infty e^{-3at}\,dt = \left[\frac{1}{-3a}\cdot e^{-3at}\right]_0^\infty = \frac{1}{3a}$

$E^*\{T_S\} = \int_0^\infty (4\cdot e^{-2at} - 3e^{-3at} - 2t\cdot a\cdot e^{-3at})\,dt =$

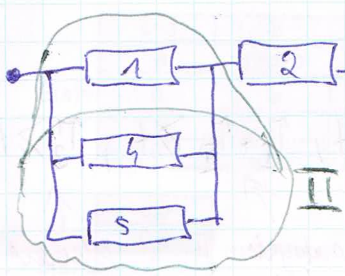
$= 4\int_0^\infty e^{-2at}\,dt - 3\int_0^\infty e^{-3at}\,dt + \frac{2}{3}\int_0^\infty(-3ae^{-3at})\cdot t\,dt =$

$= \cancel{4}\cdot\frac{{}^{2}1}{\cancel{2}a} - \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}a} + \frac{2}{3}\cdot\left(\left[e^{-3at}\cdot t\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-3at}\,dt\right) =$

$= \frac{1}{a} + \frac{2}{3}\left(0 - \frac{1}{3a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{2}{9a} = \frac{7}{9a}$

$\boxed{\eta_{E\{T\}} = \frac{7}{{}_3\cancel{9}a}\cdot\frac{\cancel{3a}}{1} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}}$

Zad 2



4, 5 – rezerwe pasywne elementu 1

$F_i = 1 - e^{-at}$

$\eta_{R(t)} = ?$ $\eta_{E\{T\}} = ?$

$\eta_{R_S}(t) = \frac{R_S^*(t)}{R_S(t)}$

$R_S(t) = R_1(t)\cdot R_2(t)\cdot R_3(t) = e^{-3at}$

$R_S^*(t) = R_{\underline{II}}(t)\cdot R_2(t)\cdot R_3(t)$

$F_{\underline{II}}(t) = F_1(t)\cdot F_4(t)\cdot F_5(t)$

$F_{\underline{II}}(t) = (1-e^{-at})^2\cdot(1-e^{-at}) = (1-2e^{-at}+e^{-2at})(1-e^{-at}) =$

$= 1 - 3e^{-at} + 3e^{-2at} - e^{-3at}$

$R_S^*(t) = (3e^{-at} - 3e^{-2at} + e^{-3at})\cdot e^{-2at} =$

$= 3e^{-3at} - 3e^{-4at} + e^{-5at}$

$R_S^*(0) = 1 - 1 + 1 = 1$ // czyli jest dobre

$\boxed{\eta_{R_S(t)}} = \frac{3e^{-3at} - 3e^{-4at} + e^{-5at}}{e^{-3at}} = \boxed{3 - 3e^{-at} + e^{-2at}}$

$\eta_{R_S(0)}(0) = 3 - 3 + 1 = 1$ // czyli jest ok b)

$$E\{T_s\} = \int_0^\infty R(t)\,dt$$

$$\boxed{E\{T_s\}} = \int_0^\infty e^{-3at}\,dt = \boxed{\frac{1}{3a}}$$

$$E^*\{T_s\} = \int_0^\infty 3e^{-3at} - \int_0^\infty 3e^{-4at}\,dt + \int_0^\infty e^{-5at}\,dt =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{3a} - 3\cdot\frac{1}{4a} + \frac{1}{5a} = \frac{20}{20a} - \frac{15}{20a} + \frac{4}{20a} = \frac{9}{20a} = \frac{9}{20a}$$

$$\boxed{\eta_{E\{T\}}} = \frac{9}{20a}\cdot\frac{3a}{1} = \boxed{1\frac{7}{20}}$$

Zad 3

Zgłoszenie napływają z prawdopodobieństwem p. Jest podwójny bufor i dwa procesory. Gdy oba procesory są wolne to zadanie przydzielane do procesora 1 z prawdopodobieństwem p, i do procesora 2 z (1-p)

Na początku są 2 zgłoszenia w systemie

q - realizacji zadania przez procesor

- Spodziewana ilość zgłoszeń po 10 krokach
- p-stwo zajętości systemu min 50% po 3 krokach

$X = \{0,1,2,3,4\}$

		0	1
	0	$(1-p)$	p
$P=$	1	$(1-p)\cdot q$	$(1-p)(1-q) + p\cdot q$
	2	$q^2(1-p)$	
	3	0	
	4	0	